

الرياضيات
السادس العلمي
الاستاذ حيدر وليد
المفيد في ثلاثية
حيدر وليد
07701780364
2019
MATHEMATICS
الأحيائي
الجزء الاول
WWW.iQ-RES.COM
@iQRES
قناتنا على التلي كرام
موقع طلاب العراق
الفصل الاول
الأعداد المركبة
الفصل الثاني
القطوع المخروطية
موقع طلاب العراق
السعدون
المتنبي
07702729223



2019

الأحيائي

المفيد في ثلاثية

حيدر وليد

07701780364

الجزء الاول



07702729223

المفيد في ثلاثية

حيدر وليد

الرياضيات

2019



الأعداد المركبة

الفصل الاول

مدخل الى موضوع الاعداد المركبة

نعلم ان الجذور التربيعية للاعداد الموجبة هي :

$$\sqrt{100} = 10 \quad , \quad \sqrt{25} = 5 \quad , \quad \sqrt{9} = 3 \quad , \quad \sqrt{1} = 1$$

اي هناك قيمة لعدد موجب تحت الجذر التربيعي .

ولكن :

$\sqrt{-16} = ?$ → 4 (خطأ) ، → -4 (خطأ)

$\sqrt{-9} = ?$ → 3 (خطأ) ، → -3 (خطأ)

إذن لا توجد قيمة حقيقية لعدد سالب تحت الجذر التربيعي .

أو جذر دليله زوجي مثل : $\sqrt[6]{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$, $\sqrt[8]{\ }$ ... الخ .

لذلك:

نفرض ان هناك قيمة لعدد سالب تحت الجذر التربيعي هو (i)

$$\sqrt{-1} = i \qquad \Rightarrow \qquad i^2 = -1$$

وبتربيع المعادلة الاخيرة

$$i^4 = 1$$

خلاصة: حفظ

$$\boxed{i^2 = -1}$$

$$\boxed{i^4 = 1}$$

$$i^3 = (i^2)(i)$$

$$i^3 = (-1)\ (i)$$

$$\boxed{i^3 = -i}$$

إستراحة شعرية:

ما مرّ ذُكركَ إلّا وابتسمتُ له
كأنك العيد والباقون أيامُ
أو هام طيفك إلا طرتُ اتبعهُ
أنتَ الحقيقة والجُلّاسُ اوهامُ

كيف نكتب عدد سالب تحت الجذر التربيعي بدلالة (i):

$\sqrt{-36} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1}$ $= 6i$	$\sqrt{-25} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{-1}$ $= 5i$	$\sqrt{-16} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1}$ $= 4i$
$\sqrt{-20} = \sqrt{20} \cdot \sqrt{-1}$ $= \sqrt{5\times4}\ (i) = 2\sqrt{5}i$	$\sqrt{-18} = \sqrt{18} \cdot \sqrt{-1}$ $= \sqrt{9\times2}\ (i) = 3\sqrt{2}i$	$\sqrt{-12} = \sqrt{12} \cdot \sqrt{-1}$ $= \sqrt{4\times3}\ (i) = 2\sqrt{3}i$

تعريف:

العدد المركب: هو العدد الذي يكتب بصيغة (a+bi) حيث يسمى :

- **a** جزؤه الحقيقي
- **b** جزؤه التخيلي $a, b \in R$

يُرمز لمجوعة الاعداد المركبة بالرمز $\mathbb{C}$

* تسمى الصيغة a+bi الصيغة العادية للعدد المركب .
أو الصيغة الجبرية للعدد المركب .

* يمكن كتابة العدد المركب بشكل زوج مرتب (a ، b) وتسمى الصيغة الديكارتية للعدد المركب .

الجزء التخيلي	الجزء الحقيقي	الصيغة الديكارتية	العدد المركب الصيغة الجبرية
3	2	(2 , 3)	$2 + 3i$
-3	-2	$(-2 , -3)$	$-2 - 3i$
-1	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3} , -1)$	$\sqrt{3} - i$
2	0	(0 , 2)	$2i$
0	3	(3 , 0)	3

$\rightarrow 2i = 0 + 2i$

$\rightarrow 3 = 3 + 0i$

قوى (i)

عند تبسيط i^n نقسم الأس على 4 وكما في الصيغة التالية:

$$i^n = \{i \ , \ -i \ , \ 1 \ , \ -1\}$$

الباقي =1 ، الباقي =3 ، الباقي =0 ، الباقي =2

باقي القسمة ، ناتج القسمة

$$i^n = (i^4)^{\text{ناتج القسمة}} \ . \ (i)^{\text{باقي القسمة}}$$

مثال

بسط ما يلي:

① $i^{25} = (i^4)^6 \ . \ (i)^1$

ناتج القسمة على (4) ، باقي القسمة

$= (1)^6 \ . \ i = i$

② $i^{58} = (i^4)^{14} \ . \ i^2$

$= (1)^{14} \ . \ i^2 = 1 * -1 = -1$

③ $i^5 = (i^4)^1 \ . \ i$

$= 1\ (i) = i$

④ $i^6 = (i^4)^1 \ . \ i^2$

$= (1)\ (-1) = -1$

⑤ $i^{999} = (i^4)^{249} \ . \ i^3$

$= (1)^{249}\ (-i) = -i$

⑥ $i^{4n+1} = (i^4)^n \ . \ i$

$= (1)^n \ . \ i = i$

ناتج i^n هو:

$\{i \ , \ -i \ , 1 \ , \ -1\}$

سؤال إضافي جد ناتج:

$i^{6n+1} = (i^6)^n \ . \ i$

$= (-1)^n \ i$

عندما n = عدد زوجي

$(-1)^n = 1 \Rightarrow i^{6n+1} = i$

عندما n = عدد فردي

$(-1)^n = -1 \Rightarrow i^{6n+1} = -i$

ملاحظة
إذا كان الاس سالب ينزل للمقام ونغيّر الاشارة ثم نبسّط كما سبق وبعدها نضرب الكسر بـ (i^4) حيث $i^4 = 1$ أي لا تأثير على الكسر (يُعتبر الضرب في واحد) .

7 i^{-17}

$$= \frac{1}{i^{17}} = \frac{1}{(i^4)^4 . i} = \frac{1}{i}(i^4)$$

$$= i^3 = -i$$

8 i^{-13}

$$= \frac{1}{(i^4)^3\ i} = \frac{1}{i}(i^4)$$

$$= i^3 = -i$$

اتفاق
كل سؤال في أي موضوع في هذا الفصل عندما نرى i مرفوعة إلى الاس نقوم بتبسيط (i) قبل التفكير بأي شيء مهما كان السؤال (ونبسّط كما في الطريقة السابقة) .

العمليات على مجموعة الأعداد المركبة

في مجموعة الأعداد المركبة يوجد عمليات رياضية كالتي مرت عليك (الجمع – الطرح – الضرب – القسمة – الجذور التربيعية والتكعيبية – النظير الجمعي والضربي ... الخ) وسنتطرق إليها بالتفصيل .

أولاً: عملية الجمع: عند جمع عددين مركبين نجمع الجزء الحقيقي مع الجزء الحقيقي والجزء التخيلي مع الجزء التخيلي وبحسب الاشارة .

مثال جد مجموع العددين المركبين في كل مما يأتي :

1 $(3 + 4i) + (2 + 5i)$

$(3+2) + (4i + 5i) = 5 + 9i$

2 $(5+7i)+(-3-9i)$

$(5-3) + (7i - 9i) = 2 - 2i$

3 $(-7 + 2i) + (2 - 5i)$

$(-7 + 2) + (2i - 5i) = -5 - 3i$

4 $\left(3 + 4\sqrt{2}\, i\right) + \left(-3 - 2\sqrt{2}\, i\right)$

$(3-3) + \left(4\sqrt{2}\, i - 2\sqrt{2}\, i\right) = 0 + 2\sqrt{2}\, i$

5 $3 + 2 - 5i$

$(3 + 0i) + (2 - 5i)$

$(3 + 2) + (0i - 5i) = 5 - 5i$

6 $\left(\frac{5}{2} - i\right) + \left(\frac{1}{5} + 2i\right)$

$\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{5}\right) + \left(-i + 2i\right)$

$\frac{27}{10} + i$

ثانياً: عملية الطرح: عند الطرح يتم توزيع اشارة السالب على القوس ثم نجري عملية الجمع أو الطرح بحسب الاشارات .

مثال جد ناتج ما يأتي :

1) $(7-13i)-(9+4i)$

$(7-13i)+(-9-4i)$

$(7-9)+(-13-4i) = -2-17i$

2) $(5+3i)-(2-4i)$

$(5+3i)+(-2+4i)$

$(5-2)+(3i+4i) = 3+7i$

3) $\left(3\sqrt{2}+\sqrt{5}\,i\right)-\left(\sqrt{2}+3\sqrt{5}\,i\right)$

$\left(3\sqrt{2}+\sqrt{5}\,i\right)+\left(-\sqrt{2}-3\sqrt{5}\,i\right)$

$\left(3\sqrt{2}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{5}i-3\sqrt{5}\,i\right)=2\sqrt{2}-2\sqrt{5}\,i$

4) $3-(5-3i)$

$(3+0i)+(-5+3i)$

$(3-5)+(0i+3i) = -2+3i$

ثالثاً: عملية الضرب: عند ضرب عددين مركبين نوزع الاقواس. هنا تذكّر أن $(i^2=-1)$.

مثال جد ناتج ما يأتي :

1) $(3+2i)(5+4i)$

$15+12i+10i+8i^2$

$15+22i-8 = 7+22i$

((i^2 تعكس اشارة ما قبلها و تحذف))

2) $(2-3i)(3+5i)$

$6+\underbrace{10i-9i}_{\text{طرح}}-15i^2$

((نعكس الاشارة وتحذف))

$6+i+15 = 21+i$

3) $(10+3i)(0+6i)$

$0+60i+0i+18i^2 = -18+60i$

((نعكس))

4) $(2+3i)(-3+5i)$

$-6+10i-9i+15i^2$

$-6+i-15 = -21+i$

5) $i(1+i) = i+i^2 = -1+i$

6) $\frac{-5}{2}(4+3i)=\left(\frac{-5}{2}\times 4\right)+\left(\frac{-5}{2}\times 3i\right)$

$=-10-\frac{15}{2}i$

رابعاً: عملية القسمة: قبل التطرق الى القسمة يجب التعرف على مُرافق العدد المركب .

مُرافق العدد المركب :

هو عكس اشارة الجزء التخيلي للعدد المركب فقط . نرمز له بالرمز $\overline{C}$.

$$C = a + bi \Rightarrow \overline{C} = a - bi$$

$$C_1 = 2 + 3i \rightarrow \overline{C_1} = 2 - 3i$$

$$C_2 = 4 + 5i \rightarrow \overline{C_2} = 4 - 5i$$

$$\overline{1 + i} = 1 - i$$

أنتبه !

$C_1 = -3 + 4i$
$C_2 = 3 - 4i$
غير مترافقات لأن اشارة الجزء الحقيقي تغيرت أيضاً .

$C_1 = (3i - 5)$
$C_2 = (-3i - 5)$
العددان مترافقان لأن اشارة الجزء التخيلي هي فقط التي تغيرت والاختلاف فقط في الترتيب .

عند ضرب عددان مترافقان فيكون الناتج : $(C . \overline{C} = a^2 + b^2)$

^{2}(الحقيقي) + ^{2}(التخيلي)

1 $(2 + 3i)(2 - 3i) = 2^2 + 3^2$
$= 4 + 9 = 13$

أنتبه ! الجزء التخيلي بدون i فقط الرقم نأخذه

2 $(1 - i)(1 + i) = (1)^2 + (1)^2 = 2$

أنتبه ! الجزء التخيلي بدون i فقط الرقم

3 $(-2 + i)(-2 - i) = (-2)^2 + (1)^2$
$= 4 + 1 = 5$

أنتبه ! الجزء التخيلي بدون i فقط الرقم

* عند وجود البسط والمقام في الاعداد المركبة نضرب البسط والمقام في مرافق العدد المركب الموجود في المقام .

ممنوع (i) بالمقام i مقام = مرافق

$$\frac{\text{بسط}}{\text{مقام } (i)} \times \frac{\text{مرافق المقام}}{\text{مرافق المقام}}$$

مثال جد ناتج ما يأتي بصيغة $a + bi$

1
$$\frac{3+4i}{3-4i} = \frac{3+4i}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i}$$
((مترافقات))

$$= \frac{9 + 12i + 12i + 16i^2}{(3)^2 + (4)^2} \quad (16i^2 = -16)$$

$$= \frac{-7+24i}{25} = \frac{-7}{25} + \frac{24}{25}i$$

2
$$\frac{2-i}{3+4i} = \frac{2-i}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i}$$

$$= \frac{6 - 8i - 3i + 4i^2}{(3)^2 + (4)^2} \quad (4i^2 = (-4))$$

$$= \frac{2-11i}{25} = \frac{2}{25} - \frac{11}{25}i$$

3
$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i}$$

$$= \frac{\cancel{1} + i + i + \cancel{i^2}}{(1)^2 + (1)^2} = \frac{2i}{2} = i$$

$$= 0 + i$$

4
$$\frac{1+2i}{-2+i} = \frac{1+2i}{-2+i} \cdot \frac{-2-i}{-2-i}$$

$$= \frac{-2 - i - 4i - 2i^2}{(-2)^2 + (1)^2} \quad (2i^2 = +2)$$

$$= \frac{\cancel{-2} - 5i + \cancel{2}}{5} = \frac{-5i}{5} = 0 - i$$

5
$$\frac{12+i}{i} = \frac{12+i}{i} \cdot \frac{-i}{-i}$$

$$= \frac{-12i - i^2}{0+1} = \frac{1-12i}{1}$$

$$= 1 - 12i$$

6
$$\frac{i}{2+3i} = \frac{i}{2+3i} \cdot \frac{2-3i}{2-3i}$$

$$= \frac{2i - 3i^2}{(2)^2 + (3)^2}$$

$$= \frac{3+2i}{13} = \frac{3}{13} + \frac{2}{13}i$$

8 $Z=\frac{7+\sqrt{3}i}{1+2\sqrt{3}i}$

$$Z=\frac{7+\sqrt{3}i}{1+2\sqrt{3}i}\cdot\frac{1-2\sqrt{3}i}{1-2\sqrt{3}i}$$

$$Z=\frac{7-14\sqrt{3}i+\sqrt{3}i+6}{1+12}=\frac{13-13\sqrt{3}i}{13}$$

$$Z=\frac{13}{13}-\frac{13\sqrt{3}}{13}i=1-\sqrt{3}i$$

7 $Z=\frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}$

$$Z=\frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}\cdot\frac{1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$$

$$Z=\frac{1-\sqrt{3}i-\sqrt{3}i-3}{1+3}=\frac{-2-2\sqrt{3}i}{4}$$

$$Z=\frac{-2}{4}-\frac{2\sqrt{3}}{4}i=\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

خامساً: النظير الضربي: هو مقلوب العدد المركب $\frac{1}{C}$ أو C^{-1}

مثال جد النظير الضربي لعدد $C=2-2i$ وضعه بالصيغة العادية للعدد المركب.

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{2-2i}\cdot\frac{2+2i}{2+2i}=\frac{2+2i}{2^2+2^2}=\frac{2+2i}{8}=\frac{2}{8}+\frac{2}{8}i$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$$

سادساً: النظير الجمعي: هو عكس العدد المركب في الاشارة $(-c)$.

$C=2+3i \rightarrow -C=-2-3i$

$C=3+7i \rightarrow -C=-3-7i$

$C=3+i \rightarrow -C=-3-i$

$C=-2+2i \rightarrow -C=2-2i$

← مجموع عدد مركب ونظيره الجمعي = صفر

إستراحة شعرية

متى ستعرف كم اهواك يا أملاً

ابيع من اجله الدنيا وما فيها

لوتطلب البحر في عينيك اسكبهُ

أو تطلب الشمس في كفيك ارميها

القوس المرفوع إلى الاس

أولاً: إذا كان القوس $(a+bi)^2$ نفتح القوس مربع حدانية .

ثانياً: إذا كان القوس $(a+bi)^3$ نجزء القوس $(\quad)^1(\quad)^2$ نفتح التربيع مربع حدانية ثم نضرب الناتج بالقوس الثاني .

ثالثاً: إذا كان القوس $(a+bi)^4$ يصبح $\left[(a+bi)^2\right]^2$ ثم نفتح القوس مربع حدانية والناتج أيضاً مربع حدانية .

رابعاً: القوى الاكبر :

$$(a+bi)^n = \begin{cases} \left[(a+bi)^2\right]^{\frac{n}{2}} & \text{زوجي } n \\ \left[(a+bi)^2\right]^{\frac{n-1}{2}} \cdot (a+bi)^1 & \text{فردي } n \end{cases}$$

مربع الحدانية ← $(a+bi)^2$

خامساً: إذا كان لدينا $\left(\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}\right)^n$.

1. نتخلص من البسط والمقام بالدرجة الأولى (نضرب داخل القوس في المرافق) .
2. بعد وضع داخل القوس بصيغة a+bi نفتح الاس بحسب السؤال . (راجع مثال رقم 6 في صفحة 15 والسؤال الثاني في صفحة 18) .

مثال 1 ضع بصورة $a + bi$

$(3 + 4i)^2$ ((نفتح التربيع مربع حدانية))

i^2 تحذف وتعكس اشارة ما قبلها

$(3+4i)^2 = 9+24i+16i^2$

$= -7+24i$

مثال 2 ضع بالصيغة العادية للعدد المركب:

$(2+3i)^2 + (12+2i)^2$

$(4+12i+9i^2) + (144+48i+4i^2)$

$4+12i-9+144+48i-4$

$(4-9+144-4) + (12i+48i) = 135+60i$

حقيقي تخيلي

مثال 3 ضع بصورة $a + bi$

$(1+i)^2 + (1-i)^2$

$(1+2i+i^2) + (1-2i+i^2)$

$(\cancel{1}+2i-\cancel{1}) + (\cancel{1}-2i-\cancel{1}) = 0+0i$

مثال 4 ضع بصورة $a + bi$

$(1+i)^4 - (1-i)^4$

$[(1+i)^2]^2 - [(1-i)^2]^2$

$(\cancel{1}+2i-\cancel{1})^2 - (\cancel{1}-2i-\cancel{1})^2$

$(2i)^2 - (-2i)^2$

$4i^2 - 4i^2 = 0 + 0i$

مثال 5 ضع بالصيغة العادية للعدد المركب:

$(1+i)^3 + (1-i)^3$

$(1+i)^2(1+i) + (1-i)^2(1-i)$

$(\cancel{1}+2i-\cancel{1})(1+i) + (\cancel{1}-2i-\cancel{1})(1-i)$

$2i(1+i) - 2i(1-i)$

$\cancel{2i}+2i^2-\cancel{2i}+2i^2 = 4i^2 = -4 + 0i$

مثال 6 ضع بالصيغة الجبرية للعدد المركب: $\left(\frac{3+i}{1+i}\right)^3$:

$\left(\frac{3+i}{1+i}\right)^3 = \left(\frac{3+i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}\right)^3$

$= \left(\frac{3-3i+i-i^2}{(1)^2+(1)^2}\right)^3$ ($i^2 = -1$)

$= \left(\frac{4-2i}{2}\right)^3 = \left(\frac{4}{2} - \frac{2}{2}i\right)^3$

$= (2-i)^3 = (2-i)^2(2-i)$

$= (4-4i-1)(2-i)$

$= (3-4i)(2-i)$ توزيع

$= 6-3i-8i-4$

$= 2-11i$

مثال

إثبت أن :

$$(1-i)(1-i^2)(1-i^3)=4$$

الطرف الأيسر $=(1-i)(1+1)(1-(-i))$

$=2(1-i)(1+i)$

مترافقان

$=2(1^2+1^2)$

الطرف الأيمن $=2(2)=4=$

تذكّر

$i^2=-1$

$i^3=-i$

مثال

إثبت أن :

$$\frac{1}{(2-i)^2}-\frac{1}{(2+i)^2}=\frac{8}{25}i$$

الطرف الأيسر $=\frac{1}{4-4i-1}-\frac{1}{4+4i-1}$

$=\frac{1}{3-4i}-\frac{1}{3+4i}$

مرافق $=\left(\frac{1}{3-4i}\cdot\frac{3+4i}{3+4i}\right)-\left(\frac{1}{3+4i}\cdot\frac{3-4i}{3-4i}\right)$

$=\frac{3+4i}{25}-\frac{3-4i}{25}=\frac{(3+4i)-(3-4i)}{25}$

الطرف الأيمن $=\frac{3+4i-3+4i}{25}=\frac{8}{25}i=$

مثال

إثبت أن :

$$\frac{(1-i)^2}{1+i}+\frac{(1+i)^2}{1-i}=-2$$

الطرف الأيسر $=\frac{1-2i-1}{1+i}+\frac{1+2i-1}{1-i}$

$=\left(\frac{-2i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}\right)+\left(\frac{2i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}\right)$

$=\frac{-2i-2}{(1)^2+(1)^2}+\frac{2i-2}{(1)^2+(1)^2}$

$=\frac{-2i-2+2i-2}{2}=\frac{-4}{2}=-2$

الطرف الأيمن $=$

مثال

ضع بصورة a + bi

$$\frac{2+3i}{1-i}\times\frac{1+4i}{4+i}=\frac{2+8i+3i-12}{4+i-4i+1}$$

$\frac{-10+11i}{5-3i}=\frac{-10+11i}{5-3i}\cdot\frac{5+3i}{5+3i}$

$=\frac{-50-30i+55i-33}{5^2+3^2}$

$=\frac{-83+25i}{34}=\frac{-83}{34}+\frac{25}{34}i$

مثال إذا كان $C_1 = 1+i$, $C_2 = 3-2i$ تحقق من أن:

1 $\overline{C_1 + C_2} = \overline{C_1} + \overline{C_2}$

L.H.S

$\overline{C_1 + C_2} = \overline{(1+i)+(3-2i)}$

$= \overline{4-i} = 4+i$

R.H.S

$\overline{C_1} + \overline{C_2} = \overline{(1+i)} + \overline{(3-2i)}$

$= (1-i)+(3+2i)$

$= 4+i$

L.H.S = R.H.S

2 $\overline{C_1 - C_2} = \overline{C_1} - \overline{C_2}$

L.H.S $\overline{C_1 - C_2}$

$= \overline{(1+i)-(3-2i)}$

$= \overline{(1+i)+(-3+2i)} = \overline{-2+3i}$

$= -2-3i$

R.H.S $\overline{C_1} - \overline{C_2}$

$\overline{(1+i)} - \overline{(3-2i)}$

$(1-i)-(3+2i)$

$(1-i)+(-3-2i) = -2-3i$

R.H.S = L.H.S

3 $\overline{C_1 . C_2} = \overline{C_1} . \overline{C_2}$

L.H.S

$\overline{C_1 . C_2} = \overline{(1+i)(3-2i)}$

$= \overline{3-2i+3i+2} = \overline{5+i}$

$= 5-i$

R.H.S

$\overline{C_1} . \overline{C_2} = \overline{(1+i)}\ \overline{(3-2i)}$

$= (1-i)(3+2i)$

$= 3+2i-3i+2 = 5-i$

R.H.S = L.H.S

4 $\overline{\left(\frac{C_1}{C_2}\right)} = \frac{\overline{C_1}}{\overline{C_2}}$

$\overline{\left(\frac{C_1}{C_2}\right)} = \overline{\left(\frac{1+i}{3-2i}\right)} = \overline{\left(\frac{1+i}{3-2i} . \frac{3+2i}{3+2i}\right)}$

$= \overline{\left(\frac{3+2i+3i-2}{3^2+2^2}\right)} = \overline{\left(\frac{1+5i}{9+4}\right)}$

$\overline{\frac{1}{13} + \frac{5}{13} i} = \frac{1}{13} - \frac{5}{13} i$

$\frac{\overline{C_1}}{\overline{C_2}} = \frac{\overline{1+i}}{\overline{3-2i}} = \frac{1-i}{3+2i} . \frac{3-2i}{3-2i}$

$= \frac{3-2i-3i-2}{(3)^2+(2)^2} = \frac{1-5i}{13}$

$\frac{1}{13} - \frac{5}{13} i$

R.H.S = L.H.S

أسئلة وزارية حول الحالات السابقة


سؤال 1 ضع بالصورة العادية للعدد المركب :

1998 - د (1)

$$(1+3i)^2+(3-2i)^2$$

$$(1+6i-9)+(9-12i-4)$$

$$(-8+6i)+(5-12i)$$

$$(-8+5)+(6i-12i)=-3-6i$$


سؤال 2 ضع بالصورة العادية للعدد المركب :

1999 - د (1)

$$\left(\frac{3-i}{1+i}\right)^2=\left(\frac{3-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}\right)^2$$

$$=\left(\frac{3-3i-i-1}{(1)^2+(1)^2}\right)^2$$

$$=\left(\frac{2-4i}{2}\right)^2=(1-2i)^2$$

$$=1-4i-4=-3-4i$$


سؤال 3 إذا كان $x=2+3i$ ، $y=3-i$

جد قيمة x^2+2y^2

نعوض x ، y بالعلامة اعلاه

2000 - د (1)

$$(2+3i)^2+2(3-i)^2$$

$$(4+12i-9)+2(9-6i-1)$$

$$-5+12i+18-12i-2=11+0i$$


سؤال 4 ضع ما يأتي بالصيغة العادية ثم جد نظيره الضربي .

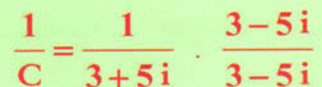
2002 - د (1)

$$(3+2i)(-2+i)$$

$$-6+3i-4i-2=-8-i$$

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{-8-i}\cdot\frac{-8+i}{-8+i}$$

$$=\frac{-8+i}{(-8)^2+(-1)^2}=\frac{-8}{65}+\frac{1}{65}i$$

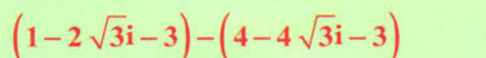


سؤال 5 جد النظير الضربي للعدد المركب ($3+5i$) ثم ضعه بالصيغة العادية .

2003 - د (1)

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{3+5i}\cdot\frac{3-5i}{3-5i}$$

$$=\frac{3-5i}{(3)^2+(5)^2}=\frac{3}{34}-\frac{5}{34}i$$



سؤال 6 جد الصيغة العادية للعدد المركب :

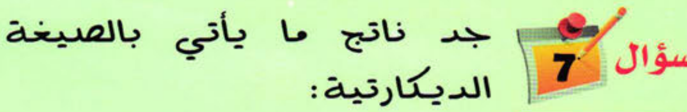
$$\left(1-\sqrt{3}i\right)^2-\left(2-\sqrt{3}i\right)^2$$

2004 - د (2)

$$\left(1-2\sqrt{3}i-3\right)-\left(4-4\sqrt{3}i-3\right)$$

$$\left(-2-2\sqrt{3}i\right)-\left(1-4\sqrt{3}i\right)$$

$$\left(-2-2\sqrt{3}i\right)+\left(-1+4\sqrt{3}i\right)=-3+2\sqrt{3}i$$


سؤال 7 جد ناتج ما يأتي بالصيغة الديكارتية :

2005 - د (1)

$$(3+4i)^2+(5-3i)(1+i)$$

$$(9+24i-16)+(5+5i-3i+3)$$

$$(-7+24i)+(8+2i)$$

$$(-7+8)+(24i+2i)=1+26i$$

$$(1,26)$$



سؤال 8 إذا كان $x = 2i - 1$ جد قيمة $x^2 + 2x + 6$

2000 خارج القطر

$x = -1 + 2i$ (ترتيب)

$(-1+2i)^2 + 2(-1+2i) + 6$

$(1 - 4i - 4) - 2 + 4i + 6$

$-3 - 4i + 4 + 4i = 1 + 0i$



سؤال 9 ضع بالصورة العادية للعدد المركب:

2012 - د (2)

$(1+i)^5 - (1-i)^5$

$(1+i)^5 = \left[(1+i)^2\right]^2 (1+i)$

$= (1 + 2i + i^2)^2 (1+i)$

$= (2i)^2 (1+i) = 4i^2 (1+i)$

$= -4(1+i) = -4 - 4i$

$(1-i)^5 = \left[(1-i)^2\right]^2 (1-i)$

$= (1 - 2i + i^2)^2 (1-i)$

$= (-2i)^2 (1-i) = 4i^2 (1-i)$

$= -4(1-i) = -4 + 4i$

$(1+i)^5 - (1-i)^5$

$(-4-4i) - (-4+4i)$

$(-4-4i) + (4-4i) = 0 - 8i$

سؤال 10 ضع المقدار $\frac{(1-i)^{13}}{64}$ بالصيغة العادية.

2013 خارج القطر

$\frac{(1-i)^{13}}{64} = \frac{\left[(1-i)^2\right]^6 . (1-i)}{64}$

$= \frac{(1 - 2i - 1)^6 (1-i)}{64}$

$= \frac{(-2i)^6 (1-i)}{64}$

$= \frac{64 i^6 (1-i)}{64} = -1(1-i) = -1 + i$

توضيح

$i^6 = i^4 . i^2$

$= (1)(-1) = -1$

إستراحة شعرية

يكفي بأني مُذ وجدتكَ صرتُ أعرفُ ما أريدْ

ووجدتُ روحي خلفَ بسمتكَ التي صارت بها الأيام عيدْ

بالله قُلْ لي... كيفَ احلمُ بالمزيدْ؟!



التحليل في مجموعة الاعداد المركبة

أولاً: مجموع مربعين : عندما يكون لدينا مجموع مربعين ($x^2 + y^2$) نضرب الحد الثاني بـ ($-i^2$) ثم يصبح فرق بين مربعين ونحلل .

أي : نضع i^2 مع الحد الثاني ونعكس اشارته .

1 $x^2 + y^2$

$x^2 - y^2 i^2 = (x - yi)(x + yi)$

2 $x^2 + 4$

$x^2 - 4i^2 = (x - 2i)(x + 2i)$

3 $a^2 + 36b^2$

$a^2 - 36b^2 i^2 = (a + 6bi)(a - 6bi)$

4 $y^2 + 100$

$y^2 - 100i^2 = (y - 10i)(y + 10i)$

ملاحظة إذا طلب في السؤال تحليل عدد الى حاصل ضرب عددين مركبين يكون التحليل كما ورد اعلاه . (مجموع مربعين) .

$1^2=1$	$6^2=36$	$11^2=121$
$2^2=4$	$7^2=49$	$12^2=144$
$3^2=9$	$8^2=64$	$13^2=169$
$4^2=16$	$9^2=81$	$14^2=196$
$5^2=25$	$10^2=100$	$15^2=225$

* عندما يعطي في السؤال رقم نبحث عن عددين من الارقام اعلاه عند جمعهم يعطي العدد الذي في السؤال ويصبح مجموع مربعين .

مثلاً : العدد $25 \leftarrow 16+9$

العدد $85 \leftarrow 81+4$

وبعدها نغير اشارة الـ + الى − ونضع i^2 ونحلل كما في الامثلة :



مثال حلل كل مما يأتي الى حاصل ضرب عاملين بصورة a+bi

1

$10 = 9 + 1$
$= 9 - i^2$
$= (3 - i)(3 + i)$

أو

$10 = 1 + 9$
$= 1 - 9i^2$
$= (1 - 3i)(1 + 3i)$

2

$29 = 25 + 4$
$= 25 - 4i^2$
$= (5 - 2i)(5 + 2i)$

أو

$29 = 4 + 25$
$= 4 - 25i^2$
$= (2 - 5i)(2 + 5i)$

3

$41 = 25 + 16$
$= 25 - 16i^2$
$= (5 - 4i)(5 + 4i)$

أو

$41 = 16 + 25$
$= 16 - 25i^2$
$= (4 - 5i)(4 + 5i)$

4

$53 = 4 + 49$
$= 4 - 9i^2$
$= (7 - 2i)(7 + 2i)$
$= (2 - 7i)(2 + 7i)$

أو

$53 = 49 + 4$
$= 49 - 4i^2$
$= (2 - 7i)(2 + 7i)$
$= (7 - 2i)(7 + 2i)$

5

$85 = 81 + 4$
$= 81 - 4i^2$
$= (9 - 2i)(9 + 2i)$

أو

$85 = 4 + 81$
$= 4 - 81i^2$
$= (2 - 9i)(2 + 9i)$

6

$125 = 121 + 4$
$= 121 - 4i^2$
$= (11 - 2i)(11 + 2i)$

أو

$125 = 4 + 121$
$= 4 - 121i^2$
$= (2 - 11i)(2 + 11i)$

ملاحظة هناك سؤال غالباً ما يرد في اسئلة الامتحانات الشهرية لبعض المدارس وهي كفكرة غير واردة بشكل صريح في المنهج سوف نتطرق اليها من باب الاحتياط .



سؤال دون الضرب بالمرافق ضع بصورة $a+bi$

((هذه هي صيغة السؤال))

أولاً: إذا اعطى في البسط عدد قابل للتحليل مباشرة والاختصار مع المقام مثلاً :

1) $$\frac{25}{3+4i} \Rightarrow \frac{9+16}{3+4i} = \frac{9-16i^2}{3+4i} = \frac{(3-4i)(3+4i)}{(3+4i)} = 3-4i$$

2) $$\frac{73}{8-3i} \Rightarrow \frac{64+9}{8-3i} = \frac{64-9i^2}{8-3i} = \frac{(8-3i)(8+3i)}{(8-3i)} = 8+3i$$

ثانياً: إذا كان العدد يحتاج إلى تجزئة مثلاً :

3) $$\frac{40}{1+3i} = \frac{4(10)}{1+3i} = \frac{4(1+9)}{1+3i} = \frac{4(1-9i^2)}{1+3i} = \frac{4(1-3i)(1+3i)}{(1+3i)}$$
$$= 4-12i$$

أنظر أن المقام هو $10 = 1^2 + 3^2$ والعدد في الأعلى 40 لذلك نقول $4(10)$

أما الأمثلة ((الأولى والثانية)) المقام $\begin{cases} 3^2 + 4^2 = 25 \\ 8^2 + 3^2 = 73 \end{cases}$ العدد موجود مباشرة نحلل

ثالثاً: إذا كان البسط لا يحوي عدد للتحليل فأننا نضرب الكسر بـ :

^{2}(التخيلي) + ^{2}(الحقيقي) التوضيح في المثال :

4 $\dfrac{3-i}{2+i}$

نأخذ المقام

$$2+i$$

$$2^2 \leftarrow \quad \rightarrow 1^2$$

$$2^2+1^2=4+1=5$$

نضرب البسط × $\dfrac{5}{5}$ ونحلل الـ (5) التي في البسط وكما يلي :

$$\frac{3-i}{2+i}\cdot\frac{5}{5} \nearrow \text{تُحلل}$$

$$\frac{3-i}{2+i}\cdot\left(\frac{4+1}{5}\right)\Rightarrow\frac{3-i}{2+i}\cdot\frac{4-i^2}{5}\Rightarrow\frac{3-i}{\cancel{(2+i)}}\cdot\frac{\cancel{(2+i)}(2-i)}{5}$$

$$=\frac{(3-i)(2-i)}{5}$$

$$=\frac{6-3i-2i}{5}=\frac{5-5i}{5}$$

$$=1-i$$

ثانياً: مجموع مكعبين / فرق بين مكعبين : نضرب الحد الثاني بـ $(-i^2)$
ثم نحلل (فرق / مجموع) مكعبين .

$x^3 - 27i$ → $-i^2$

تذكر قانون مكعبين

$x^3 + 27i^3 = (x+3i)(x^2 - 3xi - 9)$

مربع الأول (عكس الاشارة) الأول × الثاني + مربع الثاني

ثالثاً: التجربة: في حالة وجود (i) في الحد الوسط نضرب الأخير بـ $(-i^2)$ ثم نحلل تجربه .

أنظر

$x^2 - 3ix + 4$

$x^2 - 3ix - 4i^2 = (x+i)(x-4i)$

$x^2 + xi + 6$

$x^2 + xi - 6i^2 = (x+3i)(x-2i)$

رابعاً: اكمال المربع: عندما لا يحلل السؤال بالتجربة ولا يوجد (i) في الوسط نضيف $\left(\frac{1}{2}\text{ معامل } x\right)^2$ ونطرقهُ.

$x^2 + 6x + 25$

نضيف معامل × هو (3)
تربيع (3) هو 9
نضيف 9 ونطرح 9

$((x^2 + 6x + 9) - 9 + 25$

$(x+3)^2 + 16$ أصبح مجموع مربعين

$(x+3)^2 - 16i^2$

$(x+3+4i)(x+3-4i)$





ايجاد قيم $x , y \in R$

أولاً: أنظر إلى السؤال بتركيز وقمْ بفتح الأقواس أن وجدت والتخلص من التربيع والتكعيب ... الخ .

ثانياً: حاول تصفية الطرفين بحيث يصبح

الحقيقي = الحقيقي

التخيلي = التخيلي (نأخذ المعاملات فقط بدون i)

ثالثاً: انتبه لوجود التحليل "فرق مربعين / تجربة / عدد ... الخ"

رابعاً: لا تقوم بضرب المرافق في حالة وجود x أو y في البسط أو المقام وحاول أن تجد مخرج أخر لحل السؤال حسب الصيغة .

خامساً: إذا أعطى في السؤال مقدارين وذكر عبارة ان المقدارين مترافقان فنتبع الخطوات التالية :

1- نقوم بوضع علامة (=) بين المقدارين مع تغيير اشارة الجزء التخيلي لأحد الأطراف فقط .

2- نقوم بتصفية الاطراف بحسب الملاحظات كالضرب بالمرافق أو فتح التربيع أو غيرها ثم نكمل الحل .

راجع مثال (9) ومثال (10)



مثال 1

جد قيم y ، x الحقيقتين :

التخيلي = التخيلي

$$3x + 4i = 2 + 8yi$$

الحقيقي = الحقيقي

$$(3x = 2) \div 3 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$(8y = 4) \div 8 \Rightarrow y = \frac{4}{8} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

مثال 2

جد قيم $x, y \in R$

$$2y + 1 - (2x - 1)i = -8 + 3i$$

تخيلي

$$(2y + 1) - (2x - 1)i = -8 + 3i$$

حقيقي

$$2y + 1 = -8 \Rightarrow 2y = -8 - 1$$

$$[2y = -9] \div 2$$

$$y = \frac{-9}{2}$$

$$-(2x - 1) = 3$$

$$-2x + 1 = 3 \Rightarrow -2x = 3 - 1$$

$$[-2x = 2] \div -2$$

$$x = -1$$

مثال 3

جد قيم $x, y \in R$

تخيلي

$$2x - 1 + 2i = 1 + (y + 1)i$$

حقيقي

$$+1$$

$$2x - 1 = 1 \Rightarrow 2x = 1 + 1 \Rightarrow [2x = 2] \div 2$$

$$\Rightarrow x = 1$$

$$-1$$

$$y + 1 = 2 \Rightarrow y = 2 - 1 \Rightarrow y = 1$$

مثال 4

جد قيم $x, y \in R$

$$y + 5i = (2x + i)(x + 2i)$$

((نفتح الأقواس))

$$y + 5i = 2x^2 + 4xi + xi - 2$$

جمع

$$y + 5i = (2x^2 - 2) + 5xi$$

$$[5x = 5] \div 5 \Rightarrow x = 1$$

$$y = 2x^2 - 2$$

$$y = 2(1)^2 - 2$$

$$y = 2 - 2 \Rightarrow y = 0$$

مثال 5 جد قيمة كل من x , y الحقيقيتين واللتان تحققان المعادلة .

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)+x+yi=(1+2i)^2$$

مُرافق   مربع حدانية

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}\right)+x+yi=1+4i-4$$

$$\left(\frac{\not{1}-i-i-\not{1}}{1^2+1^2}\right)+x+yi=-3+4i$$

$$\frac{-\not{2}i}{2}+x+yi=-3+4i \quad (+i)$$

$$x+yi=-3+5i$$

$$x=-3$$

$$y=5$$



جد قيم $x , y \in R$

$$8i=(x+2i)(y+2i)+1$$

فتح الاقواس

$$8i=xy+2xi+2yi-4+1$$

$$0+8i=(xy-3)+(2x+2y)i$$

حقيقي   تخيلي

$$xy-3=0 \Rightarrow [xy=3]\div x$$

$$y=\frac{3}{x} \quad \ldots\ldots\ (1)$$

تخيلي = تخيلي $[2x+2y=8]\div 2$

نعوض (1) في (2)

$$x+y=4 \quad \ldots\ldots(2)$$

$$\left[x+\frac{3}{x}=4\right].x$$

$$x^2+3=4x \Rightarrow x^2-4x+3=0$$

$$(x-1)(x-3)=0$$

أما $x-1=0 \Rightarrow x=1$

أو $x-3=0 \Rightarrow x=3$

نعوض x في معادلة (2) لبسط y

عندما $x=1$ $y=\frac{3}{x}=\frac{3}{1}=3$

عندما $x=3$ $y=\frac{3}{x}=\frac{3}{3}=1$

x	y
1	3
3	1

مثال 6 جد قيم $x, y \in R$

$$\left(\frac{2-i}{1+i}\right)x+\left(\frac{3-i}{2+i}\right)y=\frac{1}{i}$$

مُرافق   مُرافق   مُرافق

$$\left(\frac{2-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}\right)x+\left(\frac{3-i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{1-i}\right)y=\frac{1}{i}\cdot\frac{-i}{-i}$$

$$\left(\frac{2-2i-i-1}{(1)^2+(1)^2}\right)x+\left(\frac{6-3i-2i-1}{(2)^2+(1)^2}\right)y=\frac{-i}{0+1}$$

تذكّر إن $-i^2=1$

$$\left(\frac{1-3i}{2}\right)x+\left(\frac{5-5i}{5}\right)y=0-i$$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right)x+(1-i)y=0-i$$

$$\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}xi+y-yi=0-i$$

$$\left[\frac{1}{2}x+y=0\right].2 \Rightarrow x+2y=0 \quad \dots\dots (1)$$

$$\left[\frac{-3}{2}x-y=-1\right].2 \Rightarrow -3x-2y=-2 \quad \dots\dots (2)$$

جعل المعادلتين انياً

$$x+2y=0$$

$$-3x-2y=-2$$

بالجمع

$$[-2x=-2]\div-2 \Rightarrow x=1$$

نعوض في (1)

$$x+2y=0$$

$$1+2y=0 \Rightarrow [2y=-1]\div 2 \Rightarrow y=\frac{-1}{2}$$





مثال 8

جد قيم $x , y \in R$

$$\frac{y}{1+i}=\frac{x^2+4}{x+2i}$$



من التمارين العامة للكتاب

* راجع تحليل مجموع مربعين (x^2+4)

$$\frac{y}{1+i}=\frac{x^2-4i^2}{x+2i}$$

$$\frac{y}{1+i}=\frac{(x-2i)(x+2i)}{(x+2i)}$$

$$y=(x-2i)(1+i)$$

$$y+0i=x+xi-2i+2$$

$$y+0i=(x+2)+(x-2)i$$

حقيقي تخيلي

$$x-2=0 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

$$y=x+2$$

$$y=2+2 \Rightarrow \boxed{y=4}$$

مثال 9

إذا كان $\frac{x-yi}{1+5i}$, $\frac{3-2i}{i}$ مترافقان

جد قيم $x , y \in R$

$$\frac{x-yi}{1+5i}=\frac{3+2i}{-i}$$



((راجع الملاحظة خامساً))

$$\frac{x-yi}{1+5i}=\left(\frac{3+2i}{-i}\cdot\frac{i}{i}\right)$$

((مُرافق))

$$\frac{x-yi}{1+5i}=\frac{3i-2}{-i^2} \quad (-i^2=1)$$

$$x-yi=(-2+3i)(1+5i)$$

$$x-yi=-2-10i+3i-15$$

$$x-yi=-17-7i$$

$$\boxed{x=-17} \quad , \quad -y=-7 \Rightarrow \boxed{y=7}$$

مثال 10

جد قيم $x , y \in R$ إذا علمت

$$\frac{3+i}{2-i} \quad , \quad \frac{6}{x+yi}$$

مترافقان

$$\frac{6}{x+yi}=\left(\frac{3-i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}\right)$$

$$\frac{6}{x+yi}=\frac{6-3i-2i-1}{(2)^2+(1)^2}$$

$$\frac{6}{x+yi}=\frac{5-5i}{5} \Rightarrow \frac{6}{x+yi}=\frac{5}{5}-\frac{5}{5}i$$

$$\frac{6}{x+yi}=1-i \Rightarrow x+yi=\frac{6}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}$$

$$x+yi=\frac{6+6i}{(1)^2+(1)^2}$$

$$x+yi=\frac{6+6i}{2}$$

$$x+yi=3+3i$$

$$\boxed{x=3} \quad , \quad \boxed{y=3}$$



مجموعة من الأسئلة الوزارية حول موضوع إيجاد قيم $x, y \in R$



سؤال 1

جد قيمتي x،y التي تحقق

1996 - د (1)

$(2x+i)(y-2i)=-2-9i$

$2xy-4xi+yi+2=-2-9i$

$(2xy+2)+(-4x+y)i=-2-9i$

(الحقيقي = الحقيقي)

$2xy+2=-2$

$2xy=-2-2 \Rightarrow [2xy=-4] \div 2x$

$y=\frac{-2}{x}$ .... (1)

(التخيلي = التخيلي)

$-4x+y=-9$ .... (2)

بتعويض (1) في (2) ينتج

$\left[-4x+\left(\frac{-2}{x}\right)=-9\right].x$

$-4x^2-2=-9x \Rightarrow 4x^2-9x+2=0$

$(4x-1)(x-2)=0$

أما $4x-1=0 \Rightarrow [4x=1] \div 4 \Rightarrow x=\frac{1}{4}$

أو $x-2=0 \Rightarrow x=2$

نعوض x في (1) لايجاد y

$y=\frac{-2}{x}=\frac{-2}{\frac{1}{4}}=-8 \quad , \quad y=\frac{-2}{2}=-1$

x	y
$\frac{1}{4}$	-8
2	-1

سؤال 2

جد قيم $x, y \in R$ التي تحقق

2000 - د (2)

$x(x+i)+y(y-i)+i=13$

$x^2+xi+y^2-yi=13-i$

$(x^2+y^2)+(x-y)i=13-i$

حقيقي تخيلي

$x^2+y^2=13$ .... (1)

$x-y=-1 \Rightarrow x=-1+y$ .... (2)

نعوض (2) في (1) لينتج

$(-1+y)^2+y^2=13$

$1-2y+y^2+y^2-13=0$

$[2y^2-2y-12=0] \div (2)$

$y^2-y-6=0$ تجربة

$(y+2)(y-3)=0$

أما $y+2=0 \Rightarrow y=-2$

أو $y-3=0 \Rightarrow y=3$

نعوض y في معادلة (1)

$x=-1+y$

عندما $y=-2 \Leftarrow x=-1+(-2)$

$x=-3$

عندما $y=3 \Leftarrow x=-1+3$

$x=2$

x	y
-3	-2
2	3

سؤال 3 جد قيمتي $x, y \in R$ التي تحقق

2009 تمهيدي

$$(3+2i)^2\ y = (x+3i)^2$$

$$(9+12i-4)\ y = x^2+6xi-9$$

$$(5+12i)\ y = (x^2-9)+6xi$$

$$5y+12yi = (x^2-9)+6xi$$

(الحقيقي = الحقيقي) $5y = x^2-9$ .... (1)

تعويض

(التخيلي = التخيلي) $12y = 6x \Rightarrow x = 2y$ .... (2)

نعوض (2) في (1)

$$5y = (2y)^2-9$$

$$5y = 4y^2-9 \Rightarrow 4y^2-5y-9=0$$

$$(4y-9)(y+1)=0$$

أما $4y-9=0 \Rightarrow [4y=9]\div 4 \Rightarrow y=\frac{9}{4}$

أو $y+1=0 \Rightarrow y=-1$

نعوض y في معادلة (2)

$$x = 2y = 2\left(\frac{9}{4}\right) \Rightarrow x = \frac{9}{2}$$

$$x = 2y = 2(-1) \Rightarrow x = -2$$

x	y
$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{4}$
-2	-1

سؤال 4 جد قيمتي x،y الحقيقيتين التي تحقق:

1998 - د (2)

$$(2+xi)(-x+i) = \frac{9y^2+49}{3y+7i}$$

$$-2x+2i-x^2i-x = \frac{9y^2-49i^2}{3y+7i}$$

$$-3x+(2-x^2)i = \frac{(3y+7i)(3y-7i)}{(3y+7i)}$$

$$-3x+(2-x^2)i = 3y-7i$$

$[-3x=3y]\div 3 \Rightarrow y=-x$ .... (1)

$$2-x^2=-7 \Rightarrow 2+7=x^2$$

بالجذر $x^2=9$

$x=\pm 3$

$y=-x$

عندما $x=3 \Rightarrow y=-3$

عندما $x=-3 \Rightarrow y=-(-3)$

$y=3$

سؤال 5 جد قيم $x, y \in R$ والتي تحقق:

1999 - د (2)

$$(3x+2yi)^2 = \frac{200}{4+3i}$$

$$9x^2+12xyi-4y^2 = \frac{200}{4+3i}\cdot\frac{4-3i}{4-3i}$$

$$(9x^2-4y^2)+12xyi = \frac{800-600i}{(4)^2+(3)^2}$$

$$(9x^2-4y^2)+12xyi = \frac{800}{25}-\frac{600}{25}i$$



سؤال 6 جد قيمتي x, y الحقيقيتين التي تحقق المعادلة:

2016 تمهيدي

$$\left(\frac{125}{11+2i}\right)x+(1-i)^2 y=11$$

$$\left(\frac{125}{11+2i}\cdot\frac{11-2i}{11-2i}\right)x+(1-2i-1)y=11$$

$$\left(\frac{125(11-2i)}{(11)^2+(2)^2}\right)x-2yi=11$$

$$\left(\frac{125(11-2i)}{125}\right)x-2yi=11$$

$$(11-2i)x-2yi=11+0i$$

$$11x-2xi-2yi=11+0i$$

$$(11x)+(-2x-2y)i=11+0i$$

$$[11x=11]\div 11 \Rightarrow x=1$$

(حقيقي = حقيقي)

$$[-2x-2y=0]\div -2$$

(تخيلي = تخيلي)

$$x+y=0$$

$$1+y=0 \Rightarrow y=-1$$

$$(9x^2-4y^2)+12xyi=32-24i$$

$$9x^2-4y^2=32 \quad \dots\dots (1)$$

$$[12xy=-24]\div 12x \Rightarrow y=\frac{-2}{x} \quad \dots\dots (2)$$

نعوض (2) في (1)

$$9x^2-4\left(\frac{-2}{x}\right)^2=32 \Rightarrow \left[9x^2-\frac{16}{x^2}=32\right].x^2$$

$$9x^4-16=32x^2 \Rightarrow 9x^4-32x^2-16=0$$

$$(9x^2+4)(x^2-4)=0$$

أما $9x^2+4=0$ يُهمل $\notin R$

أو $x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4$ بالجذر

$$x=\pm 2$$

$$y=\frac{-2}{x}=\frac{-2}{2}=-1$$

$$y=\frac{-2}{x}=\frac{-2}{-2}=1$$

x	y
2	-1
-2	1

سؤال 7 جد قيمتي $x, y \in R$ إذا علمت :

2016 - د (2)

$$(x+2i)(x-i)=\frac{121+9y^2}{11+3yi}$$

$$x^2-xi+2xi+2=\frac{121-9y^2i^2}{11+3yi}$$

$$(x^2+2)+xi=\frac{(11+3yi)(11-3yi)}{(11+3yi)}$$

تخيلي = تخيلي

$$(x^2+2)+xi=11-3yi$$

حقيقي = حقيقي

$x^2+2=11 \Rightarrow x^2=11-2 \Rightarrow x^2=9$ بالجذر

$$x=\mp 3$$

$$x=-3y \div -3 \Rightarrow y=\frac{x}{-3}=\frac{\mp 3}{-3}$$

$$y=\pm 1$$

سؤال 8 جد قيمتي $x, y \in R$ والتي تحقق :

2008 - د (2)

$$y+5i=(2x+i)(x+i)$$

$$y+5i=2x^2+2xi+xi-1$$

$$y+5i=(2x^2-1)+3xi$$

$$y=2x^2-1 \quad \ldots\ldots(1)$$

$$3x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{3}$$

$$y=2\left(\frac{5}{3}\right)^2-1 \Rightarrow y=\frac{50}{9}-1$$

$$y=\frac{41}{9}$$

سؤال 9 جد قيم x، y الحقيقيتين التي تحقق :

2010 - د (1)

$$12+5i=(x+3i)(y-2i)$$

$$12+5i=xy-2xi+3yi+6$$

$$xy+6=12 \Rightarrow xy=12-6$$

حقيقي حقيقي

$$\frac{xy}{x}=\frac{6}{x} \Rightarrow y=\frac{6}{x}$$

$$-2x+3y=5$$

$$-2x+3\left(\frac{6}{x}\right)=5 \Rightarrow \left[-2x+\frac{18}{x}=5\right].x$$

$$-2x^2+18=5x \Rightarrow 2x^2+5x-18=0$$

$$(2x+9)(x-2)=0$$

أما $2x+9=0 \Rightarrow \frac{2x}{2}=\frac{-9}{2} \Rightarrow x=\frac{-9}{2}$

أو $x-2=0 \Rightarrow x=2$

$$y=\frac{6}{x}$$

$$x=-\frac{9}{2} \Rightarrow y=\frac{6}{\frac{-9}{2}}=6\left(\frac{-2}{9}\right)=-\frac{4}{3}$$

$$x=2 \Rightarrow y=\frac{6}{2}=3$$

الجذور التربيعية للعدد المركب

نفرض $\sqrt{a+bi} = x+yi$ بالتربيع

$a+bi = x^2 + 2xyi - y^2$ ((مربع حدانية)) $\Rightarrow$ $\boxed{a+bi = (x^2 - y^2) + 2xyi}$ ((ثابتة في الحل))

ثم حقيقي = حقيقي $x^2 - y^2 = a \quad ....(1)$

تخيلي = تخيلي $\dfrac{2xy}{2x} = \dfrac{b}{2x}$

$y = \dfrac{b}{2x} \quad ....(2)$

الناتج:

$C = \mp($ قيمة $x \bigcirc$ قيمة $y\,i)$

اشارة الجزء التخيلي من السؤال

$x, y \leftarrow$ الجذور هي $C = \mp(x \bigcirc yi)$

اشارة الجزء التخيلي لعدد السؤال

مثال جد الجذور التربيعية:

1 $8+6i$

$\sqrt{8+6i} = x+yi$ بالتربيع

$8+6i = (x^2 - y^2) + 2xyi$

$x^2 - y^2 = 8 \quad ....(1)$

$[2xy = 6] \div 2x \Rightarrow \dfrac{2xy}{2x} = \dfrac{6}{2x}$

$y = \dfrac{3}{x} \quad ....(2)$

نعوض (2) في (1)

$x^2 - y^2 = 8$

$x^2 - \left(\frac{3}{x}\right)^2 = 8 \Rightarrow \left[x^2 - \frac{9}{x^2} = 8\right] . x^2$

$x^4 - 9 = 8x^2$

$x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ (تجربة)

$(x^2+1)(x^2-9) = 0$

أما $x^2 + 1 = 0$ يُهمل $\notin R$

أو $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9$ بالجذر

$x = \mp 3$

تعويض

$y = \dfrac{3}{x} \Rightarrow y = \dfrac{3}{\mp 3} = \mp 1$

$C = \mp(3+i)$

$C_1 = 3+i$
$C_2 = -3-i$ ((الجذور هي))

2 $7+24i$

$\sqrt{7+24i}=x+yi$ بالتربيع

$7+24i=(x^2-y^2)+2xyi$

$x^2-y^2=7$ ......(1)

$[2xy=24]\div 2x \Rightarrow y=\frac{12}{x}$ ......(2)

تعويض في معادلة (1)

$x^2-y^2=7$

$x^2-\left(\frac{12}{x}\right)^2=7 \Rightarrow \left[x^2-\frac{144}{x^2}=7\right].x^2$

$x^4-144=7x^2 \Rightarrow x^4-7x^2-144=0$

$(x^2+9)(x^2-16)=0$

أما $x^2+9=0$ يُهمل $\notin R$

أو $x^2-16=0 \Rightarrow x^2=16$ بالجذر

$x=\mp 4$

تعويض

$y=\frac{12}{x}=\frac{12}{\mp 4}=\mp 3$

$C_1=\mp(4+3i)$

$C_1=4+3i$, $C_2=-4-3i$

توضيح

في حالة $(+)$ $C_1=+(4+3i)=4+3i$

في حالة $(-)$ $C_2=-(4+3i)=-4-3i$

3 $-i$

$\sqrt{0-i}=x+yi$ بالتربيع

$0-i=(x^2-y^2)+2xyi$

$x^2-y^2=0$ ......(1)

$[2xy=-1]\div 2x \Rightarrow y=\frac{-1}{2x}$ ......(2)

$x^2-y^2=0$

$x^2-\left(\frac{-1}{2x}\right)^2=0 \Rightarrow \left[x^2-\frac{1}{4x^2}=0\right].4x^2$

$4x^4-1=0$ ((فرق بين مربعين))

$(2x^2+1)(2x^2-1)=0$

أما $2x^2+1=0$ يُهمل $\notin R$

أو $2x^2-1=0 \Rightarrow [2x^2=1]\div 2$

$x^2=\frac{1}{2}$ بالجذر $x=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}$

$y=\frac{-1}{2x}=\frac{-1}{\sqrt{2}.\sqrt{2}\left(\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$C=\mp\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

اشارة الجزء التخيلي لعدد السؤال

$C_1=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$

$C_2=\frac{-1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$

4 $-6i$

$\sqrt{0-6i}=x+yi$ بالتربيع

$0-6i=(x^2-y^2)+2xyi$

$x^2-y^2=0 \quad ....(1)$

$[2xy=-6]\div 2x \Rightarrow y=\frac{-3}{x} \quad ....(2)$

تعويض

$x^2-y^2=0$

$x^2-\left(\frac{-3}{x}\right)^2=0 \Rightarrow \left[x^2-\frac{9}{x^2}=0\right].x^2$

$x^4-9=0$ ((فرق بين مربعين))

$(x^2-3)(x^2+3)=0$

أما $x^2-3=0 \Rightarrow x^2=3$ بالجذر

$x=\mp\sqrt{3}$

أو $x^2+3=0$ يُهمل $\notin R$

$y=\frac{-3}{x}=\frac{-3}{+\sqrt{3}}=\frac{-(\sqrt{3}.\sqrt{3})}{\mp\sqrt{3}}$

$y=\pm\sqrt{3}$

$\mp(\sqrt{3}-\sqrt{3}i)$

$C_1=\sqrt{3}-\sqrt{3}i$

$C_2=-\sqrt{3}+\sqrt{3}i$

5 $8i$

$\sqrt{0+8i}=x+yi$ بالتربيع

$0+8i=(x^2-y^2)+2xyi$

$x^2-y^2=0 \quad ....(1)$

$\left[\frac{2xy}{2x}=\frac{8}{2x}\right]\div 2x \Rightarrow y=\frac{4}{x} \quad ....(2)$

$x^2-y^2=0$

$x^2-\left(\frac{4}{x}\right)^2=0 \Rightarrow \left[x^2-\frac{16}{x^2}=0\right].x^2$

$x^4-16=0$ ((فرق بين مربعين))

$(x^2-4)(x^2+4)=0$

أما $x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4$ بالجذر

$x=\pm 2$

أو $x^2+4=0$ يُهمل $\notin R$

$y=\frac{4}{x}=\frac{4}{+2}=\pm 2$

$C=\pm(2+2i)$

$C_1=2+2i$

$C_2=-2-2i$

6 $\frac{4}{1-\sqrt{3}i}$

$$\frac{4}{1-\sqrt{3}i} \cdot \frac{1+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i} = \frac{4\left(1+\sqrt{3}i\right)}{(1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}$$

$$\frac{\not{4}\left(1+\sqrt{3}i\right)}{\not{4}} = 1+\sqrt{3}i$$

$\sqrt{1+\sqrt{3}i} = x+yi$ بالتربيع

$1+\sqrt{3}i = (x^2-y^2)+2xyi$

$x^2-y^2=1$ ....(1)

$\left[2xy=\sqrt{3}\right]\div 2x \Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{2x}$

تعويض

$x^2-y^2=1$

$x^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2x}\right)^2=1$

$\left[x^2-\frac{3}{4x^2}=1\right].4x^2$

$4x^4-3=4x^2$

$4x^4-4x^2-3=0$ (تجربة)

$(2x^2+1)(2x^2-3)=0$

$2x^2+1=0$ يُهمل $\notin R$

أو $2x^2-3=0 \Rightarrow \left[2x^2=3\right]\div 2$

$x^2=\frac{3}{2}$ بالجذر $x=\mp\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$y=\frac{\sqrt{3}}{2x}=\frac{\sqrt{3}}{2\left(\mp\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)}=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}$

توضيح

$$\frac{\not{\sqrt{3}}}{\sqrt{2}.\not{\sqrt{2}}\left(\frac{\not{\sqrt{3}}}{\not{\sqrt{2}}}\right)}$$

$C=\mp\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

$C_1=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$

$C_2=\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$



7 -25

$x=\sqrt{-25}$

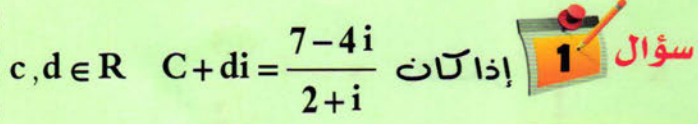
$x=\pm 5i$

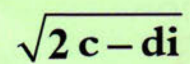


8 -17

$x=\sqrt{17}.\sqrt{-1}$

$x=\pm\sqrt{17}i$


أسئلة الوزارية حول موضوع الجذور التربيعية



سؤال 1 إذا كان $C+di=\frac{7-4i}{2+i}$ $\quad c,d\in R$

1997 - د (1)

$\sqrt{2c-di}$

ملاحظة

عندما يعطي سؤال فيه علاقة تحتوي مجهول نقوم بتبسيط العلاقة وبضد منها المجهول .

$\therefore$ نجد قيم $c,d\in R$ من العلاقة أولاً .

$$c+di=\frac{7-4i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}$$

$$c+di=\frac{14-7i-8i-4}{(2)^2+(1)^2}=\frac{10-15i}{5}$$

$$C+di=2-3i \qquad C=2$$

$$d=-3$$

$$\sqrt{2c-di}=\sqrt{2(2)-(-3)i}$$

بالتربيع $\sqrt{4+3i}=x+yi$

((اشارة الجزء التخيلي))

$$4+3i=(x^2-y^2)+2xyi$$

$$x^2-y^2=4 \quad ....(1)$$

$$\left[\frac{2xy}{2x}=\frac{3}{2x}\right]\div 2x \Rightarrow y=\frac{3}{2x} \quad ....(2)$$

تعويض

$$x^2-y^2=4$$

$$x^2-\left(\frac{3}{2x}\right)^2=4$$

$$\left[x^2-\frac{9}{4x^2}=4\right].4x^2 \Rightarrow 4x^4-9=16x^2$$

$$4x^4-16x^2-9=0$$

$$(2x^2-9)(2x^2+1)=0$$

أما $2x^2-9=0\Rightarrow[2x^2=9]\div 2$

بالجذر $x^2=\frac{9}{2}$

$$x=\mp\frac{3}{\sqrt{2}}$$

أو $2x^2+1=0$ يُهمل $\notin R$

$$y=\frac{3}{2x}=\frac{\not{3}}{(\sqrt{2}.\not{\sqrt{2}})\mp\frac{\not{3}}{\not{\sqrt{2}}}}=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$2=\sqrt{2}.\sqrt{2}$

$$C=\mp\left(\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$C_1=\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$$

$$C_1=\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$$

سؤال 2 جد الجذرات التربيعيان للعدد المركب $\frac{14+2i}{1+i}$ (2004 - د (2))

ملاحظة يجب وضع العدد بصيغة (a+bi)

$$\frac{14+2i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{14-14i+2i+2}{(1)^2+(1)^2}$$

$$\frac{16-12i}{2} = 8-6i$$

$\sqrt{8-6i} = x+yi$ بالتربيع

$$8-6i = (x^2-y^2)+2xyi$$

$x^2-y^2 = 8 \quad ....(1), \quad 2xy = -6 \div 2x$

$y = \frac{-3}{x} \quad ....(2)$

$$x^2 - \left(\frac{-3}{x}\right)^2 = 8$$

$$\left[x^2 - \frac{9}{x^2} = 8\right] . x^2 \Rightarrow x^4 - 9 = 8x^2$$

$$x^4 - 8x^2 - 9 = 0$$

$$(x^2-9)(x^2+1) = 0$$

أما $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9$ بالجذر $x = \mp 3$

أو $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow$ يُهمل $\notin R$

$$y = \frac{-3}{x} = \frac{-3}{\mp 3} = \pm 1$$

$C = \mp(3-i)$

$C_1 = 3-i$

$C_2 = -3+i$

سؤال 3 جد الجذرات التربيعيان للعدد المركب $(-1+7i)(1+i)$ (2010 - د (2))

ملاحظة نضع العدد بصيغة (a+bi)

$$-1-i+7i-7 = -8+6i$$

$\sqrt{-8+6i} = x+yi$ بالتربيع

$$-8+6i = (x^2-y^2)+2xyi$$

$x^2 - y^2 = -8 \quad ....(1)$

$[2xy = 6] \div 2x \Rightarrow y = \frac{3}{x} \quad ....(2)$

$$x^2 - y^2 = -8$$

$$x^2 - \left(\frac{3}{x}\right)^2 = -8 \Rightarrow \left[x^2 - \frac{9}{x^2} = -8\right] . x^2$$

$x^4 - 9 = -8x^2 \Rightarrow x^4 + 8x^2 - 9 = 0$ تجربة

$$(x^2+9)(x^2-1) = 0$$

أما $x^2 + 9 = 0$ يُهمل $\notin R$

أو $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$ بالجذر $x = \mp 1$

$$y = \frac{3}{x} = \frac{3}{\mp 1} = \mp 3$$

$C = \mp(1+3i)$

$C_1 = 1+3i$

$C_2 = -1-3i$







تكوين المعادلة التربيعية إذا عُلِمَ جذرها

عندما يطلب معادلة تربيعية ويعطي جذريّ المعادلة:

1. يجب وضع الجذرين بصورة $a+bi$
2. نجد مجموع الجذرين وحاصل ضرب الجذرين .
3. نطبق العلاقة التالية:

((صيغة قياسية)) $x^2 -$ (مجموع الجذرين) $x +$ (حاصل ضرب الجذرين) $= 0$

* عندما يقول في السؤال ان المعادلة ذات معاملات حقيقية هذا يعني ان الجذران مترافقان .

مثال 1 كوّن المعادلة التربيعية التي جذرها m, L حيث $m=1-i,\ L=1+2i$

$m+L=(1-i)+(1+2i)$

مجموع الجذرين $=2+i$

$m.L=(1-i)(1+2i)$

ضرب الجذرين $=1+2i-i+2$

$=3+i$

$x^2-(2+i)x+(3+i)=0$

مثال 2 كوّن المعادلة التربيعية التي جذرها $\mp(2+2i)$

$m=2+2i \quad , \quad L=-2-2i$

$m+L=(2+2i)+(-2-2i)=0$

$m.L=(2+2i)(-2-2i)$

$=-4-4i-4i+4=-8i$

$x^2-(0)x+(-8i)=0$

$x^2-8i=0$

مثال 3 كوّن المعادلة التربيعية التي جذرها $L=(3-2i)^2 \ , \ m=\dfrac{3-i}{1+i}$

* يجب تبسيط الجذور أولاً

$m=\dfrac{3-i}{1+i}\cdot\dfrac{1-i}{1-i}=\dfrac{3-3i-i-1}{(1)^2+(1)^2}$

$m=\dfrac{2-4i}{2} \Rightarrow m=1-2i$

$L=(3-2i)^2=9-12i-4$

$L=5-12i$

مجموع الجذرين $m+L=(1-2i)+(5-12i)$

$=6-14i$

$m.L=(1-2i)(5-12i)$

$=5-12i-10i-24=-19-22i$

$x^2-(6-14i)x+(-19-22i)=0$

مثال 1

كوّن المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية والتي احد جذورها (i).

((المعاملات حقيقية أي ان الجذران مترافقان)).

$m = i$
$L = -i$

$m + L = (i) + (-i) = 0$

$m.L = (i)(-i) = -i^2 = 1$

$x^2 - (0)x + 1 = 0$

$x^2 + 1 = 0$

مثال 2

كوّن المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية والتي احد جذورها (3−4i).

((مترافقان)) $m = 3 - 4i \quad , \quad L = 3 + 4i$

$m + L = (3 - 4i) + (3 + 4i)$
$= 6$

$m.L = (3 - 4i)(3 + 4i)$
$= 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$

$x^2 - 6x + 25 = 0$

مثال 3

كوّن المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية والتي احد جذورها (5−i).

$m + L = (5 - i) + (5 + i)$
$= 10$

$m.L = (5 - i)(5 + i)$
$= (5)^2 + (1)^2 = 25 + 1 = 26$

$x^2 - 10x + 26 = 0$

مثال 4

كوّن المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية والتي احد جذورها $\frac{\sqrt{3} + 3i}{4}$.

$\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i \quad , \quad \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}i$

$m + L = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}i\right)$

$= \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$m.L = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}i\right)$

$= \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2$

$= \frac{3}{16} + \frac{9}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

$x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3}{4} = 0$



أسئلة مختلفة ذات صلة

* إذا أعطى في السؤال معادلة تربيعية تحويل مجاهيل نتبع الخطوات التالية:

أولاً: نضع المعادلة بالشكل القياسي حيث الطرف الايمن = 0 ثم نجعلها بالصيغة التالية:

$x^2 -$ (مجموع الجذرين) $x +$ (حاصل ضرب الجذرين) = 0

ثانياً: إذا وجد أكثر من حد فيه × نسحب الـ × عامل مشترك ويسحب باشارة سالب لأن الشكل القياسي فيه معامل × سالب

ثالثاً: نقسم على معامل x^2 دائماً لجعله =1

رابعاً: نحدد مجموع الجذرين وحاصل ضرب الجذرين.

خامساً: إذا كان في المعادلة مجهول واحد فقط نحاول البدء بالجزء المعلوم كلياً. (حاصل الضرب أو حاصل الجمع) كما في السؤال (2)

سؤال 1 إذا كان $(2+4i)$ هو أحد جذري المعادلة $2x^2 - x - bx + c - 6 = 0$ معاملاتها حقيقية، جد $b, c \in R$

2015 - د (2)

$$2x^2 - x - bx + c - 6 = 0$$

$$\left[2x^2 - x(1+b) + (c-6) = 0\right] \div 2$$

عامل مشترك

انظر هنا

$$x^2 - x\left(\frac{1+b}{2}\right) + \left(\frac{C-6}{2}\right) = 0$$

مجموع الجذرين — حاصل ضرب الجذرين

الجذران مترافقان لأن المعاملات حقيقية

$$(2-4i) + (2+4i) = \frac{1+b}{2}$$

مجموع الجذرين

$$4 = \frac{1+b}{2} \Rightarrow 1+b = 8$$

$$b = 8-1$$

$$b = 7$$

$$(2-4i)(2+4i) = \frac{c-6}{2}$$

حاصل ضرب الجذرين

$$(2)^2 + (4)^2 = \frac{c-6}{2} \Rightarrow 4+16 = \frac{c-6}{2}$$

$$20 = \frac{c-6}{2} \Rightarrow c-6 = 40$$

$$c = 40+6$$

$$c = 46$$

سؤال 2 إذا كان $(3 + i)$ هو أحد جذري المعادلة $x^2 - ax + (5+5i) = 0$ فما قيمة $a \in \mathbb{C}$ وما قيمة الجذر الآخر؟ (الكتاب)

نبدأ بالجزء الكامل وهو حاصل ضرب الجذرين

$m.L = 5+5i \Rightarrow (3+i)(L) = 5+5i$

$L = \frac{5+5i}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i} = \frac{15-5i+15i+5}{9+1}$

$L = \frac{20+10i}{10} = \frac{20}{10} + \frac{10}{10}i$

$L = 2+i$

الان نجد قيمة a وهي تمثل مجموع الجذرين

$a = m+L$

$a = (3+i)+(2+i)$

$a = 5+2i$



سؤال 3 إذا كان أحد جذري المعادلة $x^2 + K = 4x - 12ix$ هو ثلاث امثال الآخر جد الجذران وما قيمة K؟

$x^2 + K = 4x - 12ix$

$x^2 - 4x + 12ix + K = 0$

$x^2 - x(4-12i) + K = 0$

مجموع الجذرين

$m = 3L$ أحد الجذرين ثلاثة أمثال الاخر

$m + L = (4-12i)$

$3L + L = 4-12i$

$[4L = 4-12i] \div 4 \Rightarrow L = 1-3i$

$m = 3(1-3i)$

$m = 3-9i$

$K = m.L \Rightarrow$ لأن k يمثل حاصل ضرب الجذرين

$K = (3-9i)(1-3i)$

$K = 3-9i-9i-27$

$K = -24-18i$

سؤال 4 إذا كان $(2 + i)$ يمثل أحد جذري المعادلة $x^2 - 4ix + a = 0$ جد الجذر الاخر. ثم جد قيمة a .

$x^2 - 4ix + a = 0 \Rightarrow x^2 - (4i)x + a = 0$

مجموع الجذرين

$m + L = +4i$

$2+i+L = 4i \Rightarrow L = -2+4i-i$

$L = -2+3i$ الجذر الأخر

$a =$ حاصل ضرب الجذرين

$a = m.L$

$a = (2+i)(-2+3i)$

$a = -4+6i-2i-3$

$a = -7+4i$

حل المعادلة التربيعية في $\mathbb{C}$

* يتم حل المعادلة من الشكل $ax^2 + bx + c = 0$ باستخدام قانون الدستور.

حيث:
$a =$ معامل x^2
$b =$ معامل x
$c =$ الحد المطلق ((بدون X))

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مثال 1 جد مجموعة حل المعادلة الآتية في مجموعة الأعداد المركبة $x^2 + 4x + 5 = 0$

$a = 1$
$b = 4$
$c = 5$

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(4) \mp \sqrt{(4)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-4 \mp \sqrt{16 - 20}}{2}$$

$$x = \frac{-4 \mp \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \mp 2i}{2}$$

$\sqrt{4} . \sqrt{-1} = 2i$

أما $x = \frac{-4 + 2i}{2} \Rightarrow x = -2 + i$

أو $x = \frac{-4 - 2i}{2} \Rightarrow x = -2 - i$

مثال 2 جد مجموعة حل المعادلة:
$2Z^2 - 5Z + 13 = 0$

$a = 2$
$b = -5$
$c = 13$

$$Z = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$Z = \frac{-(-5) \mp \sqrt{(-5)^2 - 4(2)(13)}}{2(2)}$$

$$Z = \frac{5 \mp \sqrt{25 - 104}}{4}$$

$$Z = \frac{5 \mp \sqrt{-79}}{4} = \frac{5 \mp \sqrt{79}i}{4}$$

أما $Z = \frac{5 + \sqrt{79}i}{4}$

أو $Z = \frac{5 - \sqrt{79}i}{4}$

مثال 3 حل المعادلة في $\mathbb{C}$

$$Z^2 - 2Zi + 3 = 0$$

$a = 1$, $b = 2i$, $c = 3$

$$Z = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$Z = \frac{-(-2i) \mp \sqrt{(-2i)^2 - 4(1)(3)}}{2(1)}$$

$$Z = \frac{2i \mp \sqrt{4i^2 - 12}}{2}$$

$$Z = \frac{2i \mp \sqrt{-4-12}}{2} = \frac{2i \mp \sqrt{-16}}{2}$$

$\sqrt{16} \cdot \sqrt{-1} = 4i$

$$Z = \frac{2i \mp 4i}{2}$$

أما $Z = \frac{2i + 4i}{2} = \frac{6i}{2} = 3i$

أو $Z = \frac{2i - 4i}{2} = \frac{-2i}{2} = -i$

* إذا كان الجذر $\sqrt{b^2 - 4ac}$ يحوي (i) نأخذ الجذر ونجده بطريقة الفرضية أما إذا كان الجذر $\sqrt{b^2 - 4ac}$ فقط عدد سالب لا نستخدم الفرضية .

مثال (3) ومثال (1) و (2) كان بدون i فقط عدد سالب لا يوجد فرضية .

أنظر مثال (4) الجذر فيه (i) بالداخل نستخدم الفرضية .

مثال 4 جد مجموعة حل المعادلة :

$$Z^2 - 3Z + 3 + i = 0$$

$a = 1$, $b = -3$, $c = 3 + i$

$$Z = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$Z = \frac{-(-3) \mp \sqrt{(-3)^2 - 4(1)[3+i]}}{2(1)}$$

فرضية

$$Z = \frac{3 \mp \sqrt{9 - 12 - 4i}}{2} = \frac{3 \mp \sqrt{-3-4i}}{2}$$

$\sqrt{-3-4i} = x + yi$ بالتربيع

$$-3 - 4i = (x^2 - y^2) + 2xyi$$

$$x^2 - y^2 = -3 \quad ....(1)$$

$$[2xy = -4] \div 2x \Rightarrow y = \frac{-2}{x} \quad ....(2)$$

$$x^2 - y^2 = -3 \Rightarrow x^2 - \left(\frac{-2}{x}\right)^2 = -3$$

$$\left[x^2 - \frac{4}{x^2} = -3\right] \cdot x^2 \Rightarrow x^4 - 4 = -3x^2$$

$$x^4 + 3x^2 - 4 = 0$$

$$(x^2 + 4)(x^2 - 1) = 0$$

أما $x^2 + 4 = 0$ يُهمل $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \mp 1$

$$y = \frac{-2}{x} = \frac{-2}{\pm 1} = \pm 2 \Rightarrow \pm(1 - 2i)$$

$$Z = \frac{3 \mp (1-2i)}{2}$$

$$Z = \frac{3 + (1-2i)}{2} = 2 - i$$

$$Z = \frac{3 - 1 + 2i}{2} = 1 + i$$

5 مثال جد مجموعة حل المعادلة:

$$Z^2+2Z+i(2-i)=0$$

$$Z^2+2Z+2i-i^2=0$$

$$Z^2+2Z+(1+2i)=0$$

$a=1$

$b=2$

$c=1+2i$

$$Z=\frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$Z=\frac{-(2)\mp\sqrt{(2)^2-4(1)[1+2i]}}{2(1)}$$

$$Z=\frac{-2\mp\sqrt{4-4-8i}}{2}$$

$$Z=\frac{-2\mp\sqrt{-8i}}{2}$$

((نجد $\sqrt{-8i}$ كما تعلمنا سابقاً)) لأن في الجذر i

$\sqrt{0-8i}=x+yi$ بالتربيع

$$0-8i=(x^2-y^2)+2xyi$$

$x^2-y^2=0$ ....(1)

$[2xy=-8]\div 2x \Rightarrow y=\frac{-4}{x}$ ....(2)

$$x^2-y^2=0$$

$$x^2-\left(\frac{-4}{x}\right)^2=0 \Rightarrow \left[x^2-\frac{16}{x^2}=0\right].x^2$$

$$x^4-16=0$$

$$(x^2+4)(x^2-4)=0$$

أما $x^2+4=0$ يُهمل $\notin R$

أو $x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4$ بالجذر

$$x=\mp2$$

$$y=\frac{-4}{x}=\frac{-4}{\mp2}=\pm2$$

هنا تعوض

$$\sqrt{-8i}=\mp(2-2i)$$

$$Z=\frac{-2\mp(2-2i)}{2}$$

أما $Z=\frac{-2+2-2i}{2}=\frac{-2i}{2}=-i$

أو $Z=\frac{-2-2+2i}{2}=\frac{-4+2i}{2}=-2+i$





ملاحظة إذا أعطى المعادلة بطريقة مجموع مربعين نحلل كما تعلمنا طريقة تحليل مجموع مربعين .

مثال حل المعادلة $4Z^2 + 25 = 0$

نضرب $(-i^2)$

$4Z^2 - 25i^2 = 0$

$(2Z - 5i)(2Z + 5i) = 0$

أما $2Z + 5i = 0 \Rightarrow [2Z = -5i] \div 2$

$Z = \frac{-5}{2} i$

أو $2Z \pm 5i = 0 \Rightarrow [2Z = 5i] \div 2$

$Z = \frac{5}{2} i$

مثال حل المعادلة $Z^2 = -12$

بالجذر $Z^2 = -12$

$Z^2 = -12$

$Z = \sqrt{-12}$

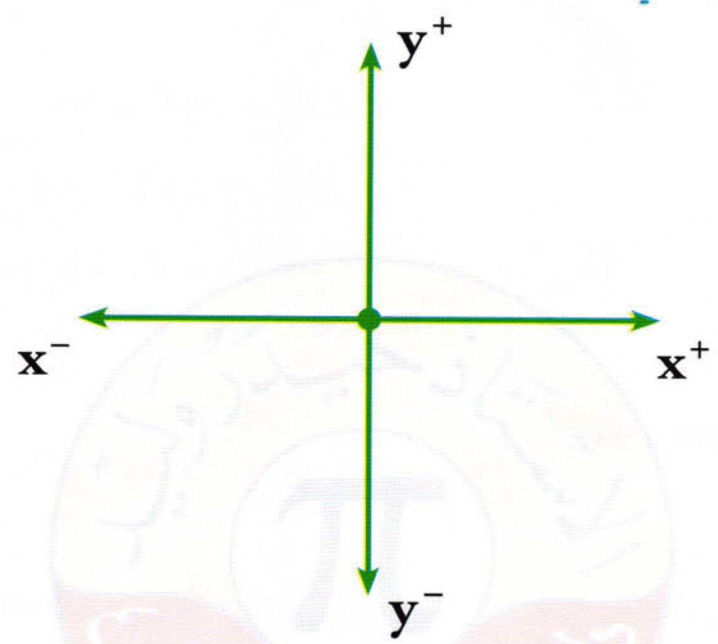
$Z = \sqrt{12} . \sqrt{-1}$

$Z = \sqrt{12} i \Rightarrow Z = \mp 2\sqrt{3} i$

التمثيل الهندسي للأعداد المركبة

العدد المركب $a + bi$ يمكن كتابتهُ بشكل زوج مرتب $P(a,b)$

* مراجعة المستوي الاحداثي :



مثال 1

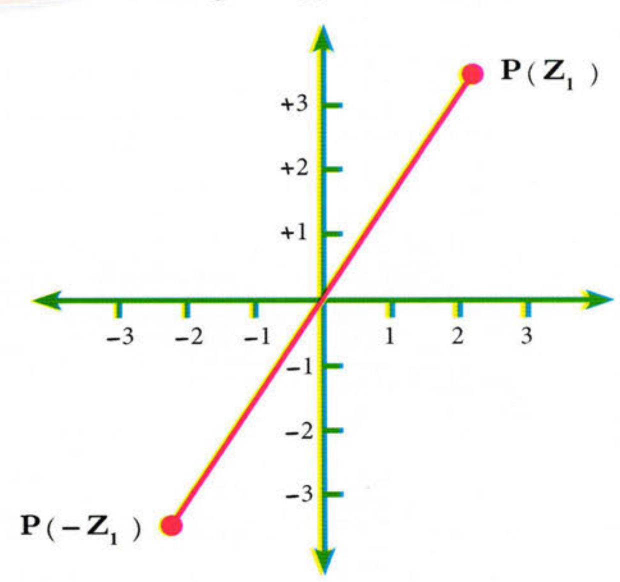
أكتب النظير الجمعي لكل من الاعداد التالية ثم مثّل هذه الاعداد ونظائرها الجمعية على شكل ارجاند :



$Z_1 = 2+3i \rightarrow (2,3)$

$-Z_1 = -2-3i \rightarrow (-2,-3)$

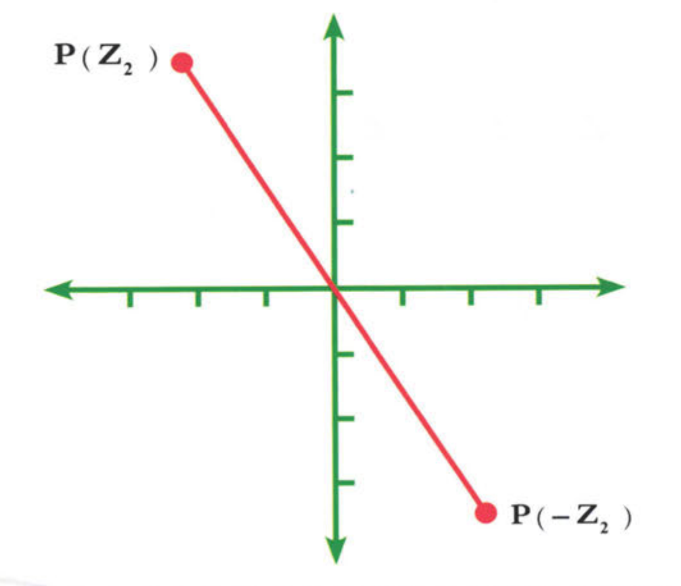
* ((النظير نقلب اشارة العدد كله))





$Z_2 = -1 + 3i \rightarrow (-1, 3)$

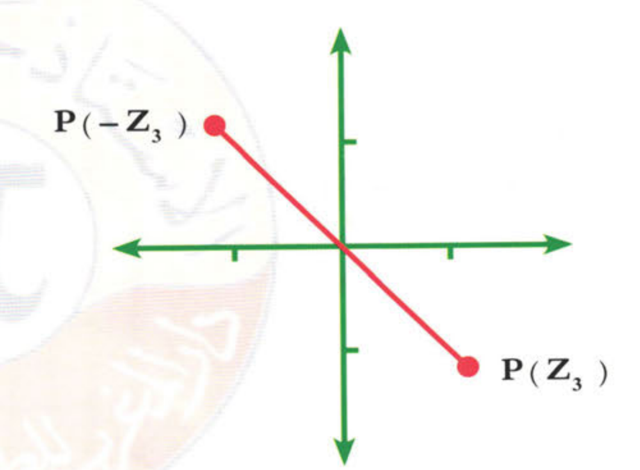
$-Z_2 = +1 - 3i \rightarrow (1, -3)$





$Z_3 = 1 - i \qquad (1, -1)$

$-Z_3 = -1 + i \qquad (-1, 1)$

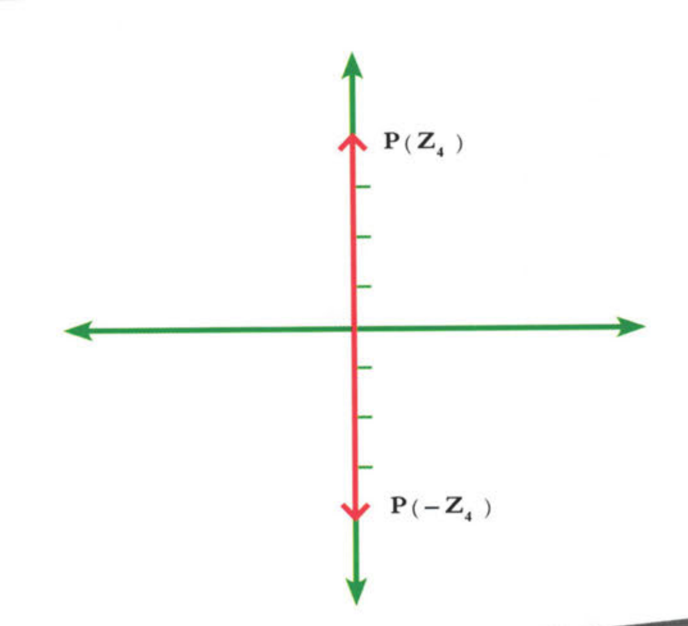


4

$Z_4 = 4i$

$Z_4 = 0 - 4i \qquad (0, -1)$

$-Z_4 = 0 - 4i \qquad (0, -4)$





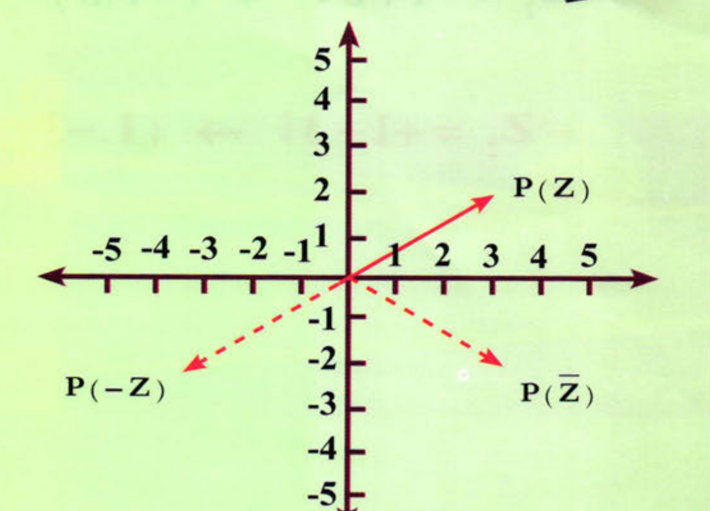
إذا كان ($Z = 4 + 2i$) فوضح على شكل ارجاند كلاً من :

$Z \ , \ \bar{Z} \ , \ -Z$

$Z = 4 + 2i \rightarrow (4,2)$

$\bar{Z} = 4 - 2i \rightarrow (4,-2)$

$-Z = -4 - 2i \rightarrow (-4,-2)$



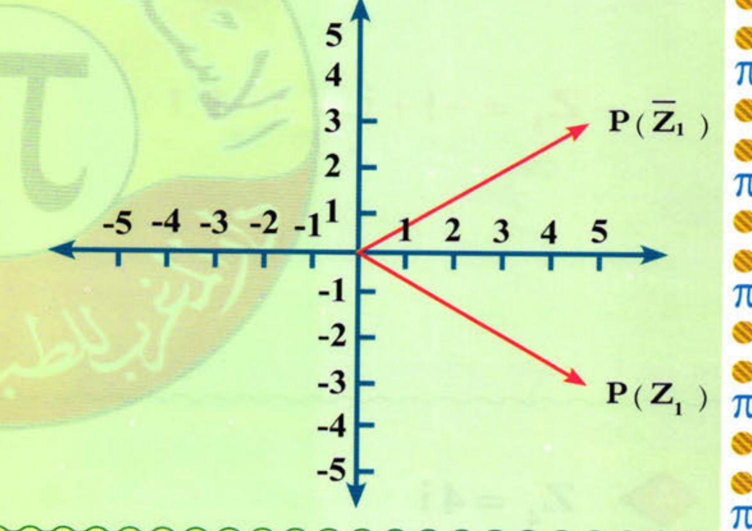


أكتب العدد المرافق لكل من الأعداد الآتية ثم مثّلها على شكل ارجاند :



$Z_1 = 5 + 3i \rightarrow (5,3)$

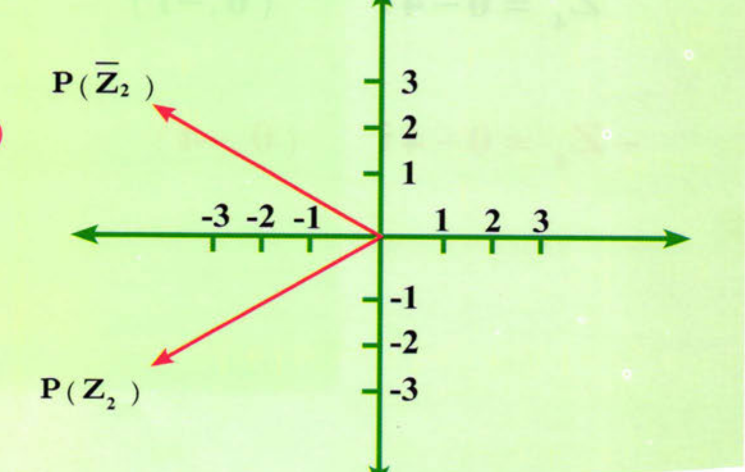
$\bar{Z}_1 = 5 - 3i \rightarrow (5,-3)$





$Z_2 = -3 + 2i \rightarrow (-3,2)$

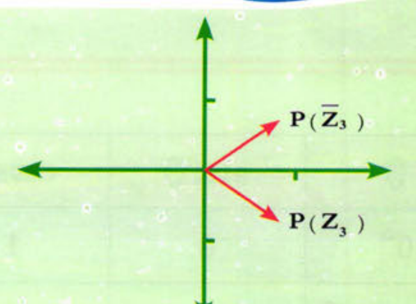
$\bar{Z}_2 = -3 - 2i \rightarrow (-3,-2)$





$Z_3 = 1 - i \rightarrow (1,-1)$

$\bar{Z}_3 = 1 + i \rightarrow (1,1)$

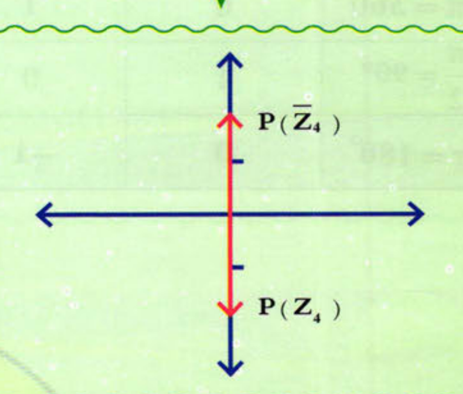




$Z_4 = -2i$

$Z_4 = 0 - 2i \quad (0,-2)$

$\bar{Z}_4 = 0 + 2i \quad (0,2)$





إذا كانت $Z_1 = 4 - 2i$ ، $Z_2 = 1 + 2i$ مثّل على شكل ارجاند $Z_1 + Z_2$.

$Z_1 + Z_2 = (4 - 2i) + (1 + 2i)$

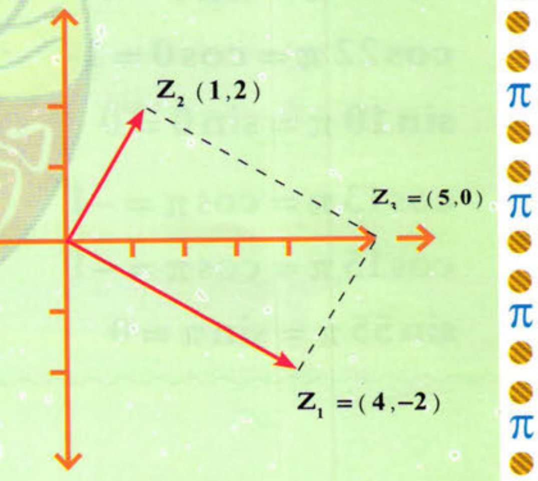
$= (4+1) + (-2+2i)$

$= 5 + 0i$

$Z_1 = 4 - 2i \quad (4-2)$

$Z_2 = 1 + 2i \quad (1,2)$

$Z_3 = 5 + 0i \quad (5,0)$





إذا كانت $Z_1 = 6 - 2i$ ، $Z_2 = 2 - 5i$ مثّل على شكل ارجاند $Z_1 - Z_2$.

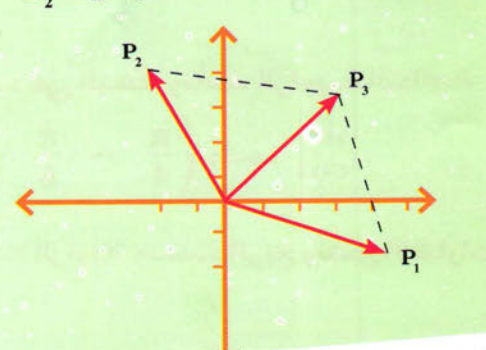
$Z_1 - Z_2 = (6 - 2i) - (2 - 5i)$

$= (6 - 2i) + (-2 + 5i) = 4 + 3i$

$P_1 (Z_1) = P_1 (6,-2)$

$P_2 (Z_2) = P_2 (-2,5)$

$P_3 (Z_3) = P_3 (4,3)$



مراجعة

θ	sin θ	cos θ
$\frac{3\pi}{2} = 270°$	-1	0
$\frac{\pi}{6} = 30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{6} = 60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4} = 45°$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

θ	sin θ	cos θ
$0°$	0	1
$2\pi = 360°$	0	1
$\frac{\pi}{2} = 90°$	1	0
$\pi = 180°$	0	-1

إيجاد قيم ($\cos\theta$ – $\sin\theta$) لبعض الزوايا

أولاً: $n\pi$
- n فردي نعتبر الزاوية π
- n زوجي نعتبر الزاوية صفر

$\sin 20\pi = \sin 0 = 0$

$\cos 22\pi = \cos 0 = 1$

$\sin 10\pi = \sin 0 = 0$

← ((n عدد زوجي اعتبرنا الزاوية صفر))

$\cos 13\pi = \cos \pi = -1$

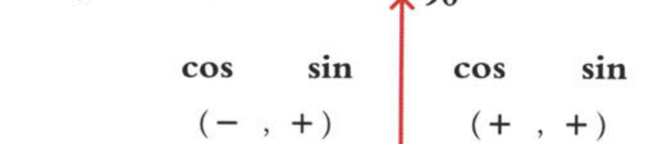
$\cos 15\pi = \cos \pi = -1$

$\sin 55\pi = \sin \pi = 0$

← ((n فردي اعتبرنا الزاوية π))

ثانياً: الزوايا التابعة للزوايا الخاصة $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right)$:

مثلاً: $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{6}$ ... الخ .



1. نهمل العـــدد في البسط ونأخذ الزاويــة الخاصة فقط $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right)$ ونجد $\frac{\sin}{\cos}$.
2. نضرب العدد × الزاوية ونحدد الربع ونضع الاشارات .

مثال

جد : $\cos\frac{5\pi}{6}$

نهمل الـ (5) ونجد $\cos\frac{\pi}{6}$ وهو $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ من الجدول

الآن نضرب $30 \times 5 = 150$ وهي في الربع الثاني الـ cos سالب ← $\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

↓

$\frac{\pi}{6}$

مثال

جد : $\sin\frac{7\pi}{4}$

نهمل الـ (7) ونجد $\frac{\pi}{4}$ وهو $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ من الجدول .

الآن نضرب $7 \times 45 = 315$ وهي في الربع الرابع الـ (sin) سالب ← $\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

↓

$\left(\frac{\pi}{4}\right)$

ثالثاً: إذا كان البسط أكبر من ضعف المقام نقسّم البسط على المقام ويجب ان يكون الناتج زوجي وسوف اوضح الطريقة في المثال .

1 $\cos\frac{49\pi}{4}$

$49 \div 4$: الناتج 12 ← ناتج زوجي (o.k) ، $4 \times 12 = 48$ ، الباقي 1 (4 ، 09 ، 8 ، 1)

نضع الباقي في البسط

$\cos\frac{1\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

2 $\sin\frac{37\pi}{6}$

$37 \div 6$: الناتج 6 ← زوجي o.k ، 36 ، الباقي 1

$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

3 $\sin\frac{47\pi}{4}$

$47 \div 4$: الناتج 11 (4 ، 07 ، 4 ، 3)

لأن الناتج فردي نعيد القسمة ونجعل الناتج زوجي (دائماً)

$47 \div 4$: الناتج 10 ، 4 ، الباقي 7

$\sin\frac{47\pi}{4}$

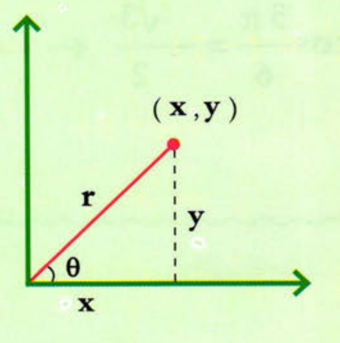
$\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ (نفس الطريقة أعلاه)




المقياس والقيمة الاساسية لسعة العدد المركب

أولاً: إذا طلب المقياس والسعة للعدد المركب $Z = x + yi$

$Z = (x, y)$



$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \ldots\ldots\ (1)$$

يرمز للمقياس بالرمز r أو $\|Z\|$ ويُقرأ $Mod(Z)$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \quad \ldots\ldots\ (2)$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \quad \ldots\ldots\ (3)$$

نجد زاوية الاسناد من قيم الـ $\sin\theta$ أو $\cos\theta$ ((ونحدد الربع))

ويرمز للسعة بالرمز θ

وتكتب $\arg(Z)$ أو θ

$(-,+)$ $\theta = \pi -$ (زاوية الاسناد)	$(+,+)$ $\theta =$ زاوية الاسناد
$(-,-)$ $\theta = \pi +$ (زاوية الاسناد)	$(+,-)$ $\theta = 2\pi -$ (زاوية الاسناد)

* يجب وضع العدد المركب بصيغة $a + bi$ أي الصيغة العددية للعدد المركب ثم نبدأ بتطبيق القوانين اعلاه (1) و (2) و (3) .

$x \leftarrow$ يمثل الجزء الحقيقي مع الاشارة

$y \leftarrow$ يمثل الجزء التخيلي ويُعوض بدون الـ (i) انتبه الى ذلك جيداً .

مثال 1 إذا كان $Z = 1+\sqrt{3}i$ فجد المقياس والقيمة الاساسية لسعة Z .

$Z = 1+\sqrt{3}i \rightarrow Z = (\overset{+}{\underset{x}{1}}, \overset{+}{\underset{y}{\sqrt{3}}})$ الربع الأول

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$r = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4}$

$\therefore\ r = 2$ (المقياس)

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}$

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

زاوية الأسناد هي $\frac{\pi}{3}$ في الربع الأول

السعة $\theta =$ زاوية الأسناد $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

مثال 2 جد مقياس وسعة العدد المركب $-2+2i$

$-2+2i \Rightarrow (\overset{-}{\underset{x}{-2}}, \overset{+}{\underset{y}{2}})$ الربع الثاني

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

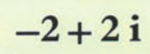
$r = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = \sqrt{4\times 2}$

$\therefore r = 2\sqrt{2}$ (المقياس)

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

زاوية الأسناد هي $\frac{\pi}{4}$ في الربع الثاني



السعة $\theta = \pi - \frac{\pi}{4} \overset{\text{توحيد}}{\underset{\text{مقام}}{\Rightarrow}} \theta = \frac{3\pi}{4}$

قانون الربع الثاني

مثال 3 إذا كان $Z = -1-i$ فجد المقياس والقيمة الاساسية لسعة Z .

$Z = -1-i \rightarrow Z = (\overset{-}{\underset{x}{-1}}, \overset{-}{\underset{y}{-1}})$ الربع الثالث

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1}$

$r = \sqrt{2}$ (المقياس)

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

زاوية الأسناد هي $\frac{\pi}{4}$ في الربع الثالث

السعة $\theta = \pi + \frac{\pi}{4} \overset{\text{توحيد}}{\underset{\text{مقام}}{\Rightarrow}} \theta = \frac{5\pi}{4}$

ثانياً: إذا أعطى المقياس والقيمة الأساسية للسعة ويطلب العدد المركب :

* إذا لم يعطي زاوية خاصة فراجع طريقة أيجاد قيم $\cos\theta$ $\sin\theta$ الواردة في (صفحة 53).

$x = r \cos\theta$

$y = r \sin\theta$

حيث $Z = x + yi$

$Z =$ الجزء الحقيقي + الجزء التخيلي (i)

مثال 1

عدد مركب مقياسه $(2\sqrt{2})$ والقيمة الأساسية للسعة $\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ جد العدد بصورة $a + bi$

$r = 2\sqrt{2} \quad , \quad \theta = \frac{3\pi}{4}$

$x = r \cos\theta$

$x = 2\sqrt{2} \, . \, \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

$x = 2\sqrt{2} \, . \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow x = -2$ الجزء الحقيقي

$x = r \sin\theta$

$x = 2\sqrt{2} \, . \, \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

$x = 2\sqrt{2} \, . \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow y = 2$ الجزء التخيلي

$Z = x + yi \Rightarrow Z =$ الجزء الحقيقي + الجزء التخيلي (i)

$Z = -2 + 2i$

مثال 2

إذا كان مقياس عدد مركب = 4 والقيمة الاساسية لسعته $\left(\frac{11\pi}{6}\right)$ جد العدد بصورة $a + bi$

$r = 4 \quad , \quad \theta = \frac{11\pi}{6}$

$x = r \cos\theta$

$x = 4\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)$

$x = 4 \, . \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow x = 2\sqrt{3}$ الجزء الحقيقي

$y = r \sin\theta$

$y = 4\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)$

$y = 4\left(\frac{-1}{2}\right) \Rightarrow y = -2$ الجزء التخيلي

$Z = x + yi \Rightarrow Z =$ الجزء الحقيقي + الجزء التخيلي (i)

$Z = 2\sqrt{3} - 2i$

فكرة إثرائية: يمكن ربط هذه الحالة مع موضوع تكوين المعادلة التربيعية وكما في الأمثلة الآتية:

مثال 1 كوّن المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية والتي أحد جذورها مقياسه (2) وسعته الاساسية $\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

ملاحظة يجب أن نجد العدد المركب وهو أحد جذور المعادلة أما الجذر الأخر فهو مرافقة لأن المعادلة ذات معاملات حقيقية.

$$x = r\cos\theta$$

$$x = 2\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$x = 2\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow x = 1$$

$$y = r\sin\theta$$

$$y = 2\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$y = \cancel{2}\left(\frac{-\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right) \Rightarrow y = -\sqrt{3}$$

$$Z = x + yi \Rightarrow Z_1 = 1 - \sqrt{3}i$$

الجذر الأخر $Z_2 = 1 + \sqrt{3}i$

مجموع الجذرين $= \left(1 - \cancel{\sqrt{3}i}\right) + \left(1 + \cancel{\sqrt{3}i}\right)$

$$= 2$$

حاصل ضرب الجذرين $= \left(1 - \sqrt{3}i\right)\left(1 + \sqrt{3}i\right)$

$$= (1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2$$

$$= 1 + 3 = 4$$

$$x^2 - 2x + 4 = 0$$

مثال 2 إذا علمت ان $Z = -1 + hi$ عدد مركب القيمة الاساسية لسعته $\frac{3\pi}{4}$ جد قيمة (h) ثم كون المعادلة التربيعية التي جذرها الأول Z والثاني ضعف الأول.

$$(\underset{x}{-1}, \underset{y}{h}) \Rightarrow x = -1, y = h$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow r = \frac{x}{\cos\theta} = \frac{-1}{\cos\frac{\pi}{4}}$$

$$r = \frac{-1}{\frac{-1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

$$y = r\ \sin\theta$$

$$y = \sqrt{2}.\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$y = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow y = 1 \quad , \quad h = 1$$

$Z_1 = -1 + i$ الجذر الأول

$Z_2 = 2Z_1$ الجذر الثاني ضعف الأول

$$Z_2 = -2 + 2i$$

مجموع الجذرين $= (-1 + i) + (-2 + 2i)$

$$= -3 + 3i$$

حاصل ضرب الجذرين $= (-1 + i)(-2 + 2i)$

$$= \cancel{2} - 2i - 2i - \cancel{2}$$

$$= -4i$$

$$x^2 - (-3 + 3i)x + (-4i) = 0$$

الصيغة القطبية: هناك صيغة أخرى للعدد المركب وهي الصيغة القطبية والتي تكتب بالشكل:

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

السعة $= \theta$ ، المقياس $= r$

مثال 1 عبّر عن العدد المركب $-2+2i$ بالصيغة القطبية.

$-2+2i \rightarrow (-2, 2)$ ، (x, y) ، (-, +) ((الربع الثاني))

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$r = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2}$

$r = 2\sqrt{2}$ (القياس)

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{4}$ الربع الثاني

$\theta = \pi - \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\text{توحيد مقام}} \theta = \frac{3\pi}{4}$

$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$Z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

مثال 2 ضع العدد $2\sqrt{3} - 2i$ بالصيغة القطبية.

$2\sqrt{3} - 2i \rightarrow (2\sqrt{3}, -2)$ ، (x, y) ، (+, -) ((الربع الرابع))

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$r = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = \sqrt{12+4} = \sqrt{16}$

$r = 4$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{6}$ ربع رابع

$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{6} \xrightarrow{\text{توحيد مقام}} \theta = \frac{11\pi}{6}$

$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$Z = 4\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

مبرهنة ديموافر

أولاً: إذا كان لدينا $(a+bi)^n$ حيث n عدد صحيح (ليس كسراً).

$$Z^n = r^n\left[\cos\theta + i\sin\theta\right]^n \Rightarrow Z^n = r^n\left[\cos(\theta . n) + i\sin(\theta . n)\right]$$

ملاحظة إذا كان n عدد صحيح سالب تصبح العلاقة:

$$Z^{-n} = r^{-n}\left[\cos(\theta . n) - i\sin(\theta . n)\right]$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$
$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

أي أن السالب الذي مع الزاوية يُهمل مع دالة الـ cos ويتم وضعه قبل دالة الـ sin

ملاحظة لحل سؤال ديموافر وكان الاس عدد صحيح يجب توفير ثلاث اركان وهي r القياس ، θ السعة ، n وهو اس القوس
وقد تعلمت سابقاً كيف تجد r و θ . ثم تطبق قانون مبرهنة ديموافر أعلاه.

الجزء الأول من الموضوع: يعطي صيغة قطبية جاهزة ما عليك سوى ضرب (الأس × الزاوية) كما في الأمثلة التالية:

مثال 1 أحسب:

① $\left[\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right]^4$

$$= \cos\left(\frac{3\pi}{8}.4\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{8}.4\right)$$

$$= \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$$

$$= 0 + i(-1) \Rightarrow 0 - i$$

② $\left[\cos\frac{5}{24}\pi + i\sin\frac{5}{24}\right]^4$

$$= \cos\left(\frac{5\pi}{24}.4\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{24}.4\right)$$

$$= \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}$$

$$= \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

③ $\left[\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right]^{-3}$

$$= \cos\left(\frac{7\pi}{12}.(-3)\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}.(-3)\right)$$

يهمل

$$= \cos\frac{-7\pi}{4} + i\sin\left(\frac{-7\pi}{4}\right)$$

إنتبه ! السالب يهمل مع cos ويتم وضع السالب قبل الـ sin

$$= \cos\frac{7\pi}{4} - i\sin\frac{7\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}i\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

مثال 2 بسّط ما يلي :

1 $$\frac{(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)^5}{(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)^3}$$

* لا يمكن ان نطرح الاسس ((عند القسمة تطرح الاسس)) لأن الاقواس مختلفة .

لذلك سوف نضرب العدد الذي بجانب θ بأس القوس ((عكس العملية بالضبط)).

$$\frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^{10}}{(\cos\theta + i\sin\theta)^9} = (\cos\theta + i\sin\theta)$$

2 $(\cos\theta + i\sin\theta)^8 \; (\cos\theta - i\sin\theta)^4$

$\cos\theta - i\sin\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^{-1}$ "توضيح"

$(\cos\theta + i\sin\theta)^8 \; (\cos\theta + i\sin\theta)^{-4}$

$(\cos\theta + i\sin\theta)^4 = \cos 4\theta + i\sin 4\theta$

حل آخر:

$(\cos\theta + i\sin\theta)^4 \left[(\cos\theta + i\sin\theta)^4 \; (\cos\theta - i\sin\theta)^2 \right]$

مترافقات

$(\cos\theta + i\sin\theta)^4 \left[\cos^2\theta + \sin^2\theta\right]^4$

(حقيقي)^2 + (تخيلي)^2 $= 1$

$\cos 4\theta + i\sin 4\theta$

مثال 3 أحسب باستخدام ديموافر $(1+i)^{11}$

$1+i \rightarrow (1, 1)$ ، x, y ، $+ \; +$ ((الربع الأول))

الركن الأول (r)

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$r = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} \Rightarrow r = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{4}$ الربع الأول

الركن الثاني $\theta = \frac{\pi}{4}$

الركن الثالث $n=11$

قانون ديموافر $Z^n = r^n (\cos\theta + i\sin\theta)^n$

تعويض $Z^{11} = \left(\sqrt{2}\right)^{11} \left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]^{11}$

ضرب الاس في الزاوية $Z^{11} = 32\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{4} + i\sin\frac{11\pi}{4}\right)$

تبسيط الزاوية $= 32\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$= 32\sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -32 + 32i$

الناتج

توضيح:

$\frac{11\pi}{4}$: $11 \div 4 = 2$ ، 8 ، الباقي 3 $\rightarrow \frac{3\pi}{4}$

4 مثال أحسب باستخدام ديموافر $(1-i)^7$

$1-i \rightarrow (\overset{+}{\underset{x}{1}}, \overset{-}{\underset{y}{-1}})$ الربع الرابع

الركن الأول (r) $r=\sqrt{x^2+y^2}$

$r=\sqrt{(1)^2+(-1)^2} \rightarrow r=\sqrt{2}$

الركن الثاني السعة (θ)

$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ زاوية الأسناد $\frac{\pi}{4}$

$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-1}{\sqrt{2}}$ الربع الرابع

$\theta=2\pi-\frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta=\frac{7\pi}{4}$

الركن الثالث n=7

قانون ديموافر $Z^n=r^n(\cos\theta+i\sin\theta)^n$

تعويض $Z^7=\left(\sqrt{2}\right)^7\left[\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right]^7$

الاس × الزاوية $Z^7=8\sqrt{2}\left(\cos\frac{49\pi}{4}+i\sin\frac{49\pi}{4}\right)$

تبسيط الزاوية $=8\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

الناتج $=8\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

$=8+8i$

5 مثال أحسب باستخدام ديموافر $(\sqrt{3}+i)^{-9}$

$\sqrt{3}+i \rightarrow (\overset{+}{\sqrt{3}}, \overset{+}{1})$ الربع الأول

$r=\sqrt{x^2+y^2}$

$r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(1)^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}$

$r=2$

$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ زاوية الأسناد $\frac{\pi}{6}$ الربع الأول

$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{2}$ $\theta=\frac{\pi}{6}$

$Z^n=r^n(\cos\theta+i\sin\theta)^n$

$Z^{-9}=(2)^{-9}\left[\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right]^{-9}$

يُهمل — يخرج قبل sin

$=\frac{1}{2^9}\left[\cos\frac{-9\pi}{6}+i\sin\frac{-9\pi}{6}\right]$

$=\frac{1}{512}\left(\cos\frac{3\pi}{2}-i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

تذكّر: $\frac{3\pi}{2}=270°$

$=\frac{1}{512}(0-(-1)i)$

$=0+\frac{1}{512}i$



نتيجة مبرهنة ديموافر

عندما يكون اس القوس كسر وبشكل ($\frac{1}{n}$) أي ان الكسر بسطهُ = 1 يكون السؤال نتيجة ديموافر .

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\theta + i\sin\theta\right]^{\frac{1}{n}} \Rightarrow Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right]$$

* ولحل سؤال النتيجة توفير أربع اركان وهي :

$k = 0, 1, 2, \dots n-1$ ، مقام الاس $n =$ ، السعة $\theta =$ ، المقياس $r =$

ملاحظة عندما يطلب (الجذور التربيعية – التكعيبية – الجذور الاربعة . . .الخ) لعدد مركب غير مرفوع الى اس يعني نتيجة والاس كسر ولا يعطي قوس في هذه الحالة انت عليك التمييز :

جذور تربيعية معناها $\Rightarrow (a+bi)^{\frac{1}{2}} \rightarrow n = 2, \quad k = 0, 1$

جذور تكعيبية معناها $\Rightarrow (a+bi)^{\frac{1}{3}} \rightarrow n = 3, \quad k = 0, 1, 2$

جذور الأربعة معناها $\Rightarrow (a+bi)^{\frac{1}{4}} \rightarrow n = 4, \quad k = 0, 1, 2, 3$

k نقف قبل الـ n برقم كما تلاحظ الامثلة التوضيحية

* إذا كان العدد المركب مرفوع الى اس كسر ولكن (البسط $\neq 1$) للأس فيكون السؤال (مبرهنة ونتيجة) .

مثلاً $(a+bi)^{\frac{3}{2}} = \left[(a+bi)^3\right]^{\frac{1}{2}}$ { $(a+bi)^3$ ، $(\text{ناتج المبرهنة})^{\frac{1}{2}}$ }

مثلاً $(a+bi)^{\frac{-5}{2}} = \left[(a+bi)^{-5}\right]^{\frac{1}{2}}$ { $(a+bi)^{-5}$ ، نتيجة ديموافر $(\text{الناتج})^{\frac{1}{2}}$ }

مثلاً $(a+bi)^{\frac{2}{-3}} = \left[(a+bi)^{-2}\right]^{\frac{1}{3}}$ { مبرهنة $(a+bi)^{-2}$ ، نتيجة $(\text{الناتج})^{\frac{1}{3}}$ }

إنتبه !
ضع اشارة السالب مع القوس الداخلي (مع المبرهنة) مهما كان موقع السالب في الأس.

* عند قراءة الملاحظة الاخيرة انظر الى سؤال 2017 دور أول فيه شرح مفصل لهذه الحالة (سؤال 20) في الاسئلة الوزارية .

مثال 1

جد الجذور التربيعية للعدد المركب $-1+\sqrt{3}i$ باستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر.

$n=2$ الربع الثاني $-1+\sqrt{3}i \to \underset{(x,y)}{(-1,\sqrt{3})}$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$r=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}$$

$$r=2$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-1}{2}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{3}$ الربع الثاني

$$\theta=\pi-\frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta=\frac{2\pi}{3}$$

$$Z^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\theta+i\sin\theta\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$Z^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right]^{\frac{1}{n}}$$

$k=0$ $\quad \frac{\frac{2\pi}{3}+0}{2}=\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$

$$Z_1=2^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$Z_1=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$$

$k=1$ $\quad \frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi}{2}=\frac{\frac{2\pi+6\pi}{3}}{2}=\frac{8\pi}{6}$

$$\theta=\frac{4\pi}{3}$$

$$Z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{-1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$$

مثال 2

جد الجذور التكعيبية للعدد المركب $27i$ باستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر.

$0+27i \to \underset{(x,y)}{(0,27)}$, $n=3$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$r=\sqrt{(0)^2+(27)^2}=\sqrt{27^2} \Rightarrow r=27$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{0}{27}=0$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{27}{27}=1$$

$\theta=\frac{\pi}{2}$

هنا لا نطبق قانون الأرباع لأن الزاوية $\frac{\pi}{2}$ لا تنتمي الى ربع وتقع على الحدود بين الربعين الأول والثاني.

$$Z^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right]$$

عندما $k=0$ $\quad \frac{\frac{\pi}{2}+0}{3}=\frac{\pi}{6}$

$$Z_1=27^{\frac{1}{3}}\left[\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right]$$

$$Z_1=3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$$





$k=1$

$$\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3} + \frac{\frac{\pi+4\pi}{2}}{3} = \frac{5\pi}{6}$$

$$Z_2 = 3\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$Z_2 = 3\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{-3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

$k=2$

$$\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3} = \frac{\frac{\pi+8\pi}{2}}{3} = \frac{9\pi}{6}$$

$$= \frac{3\pi}{2}$$

$$Z_3 = 3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$= 3(0-i) = -3i$$

مثال 3 جد الجذور الاربعة للعدد (-16) .

$$-16+0i \rightarrow \underset{(x,y)}{(-16,0)} \quad , \quad n=4$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-16)^2+(0)^2} = \sqrt{256}$$

$$r = 16$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-16}{16} = -1$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{0}{16} = 0$$

لا نطبق قانون الأرباع لأن π تقع على الحدود بين الربعين الثاني والثالث .

$\theta = \pi$ ((تبقى كما هي))

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\,\frac{\theta+2k\pi}{n}\right]$$

الزاوية

$$\frac{\theta+2k\pi}{n} \Rightarrow \frac{\pi+0}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$Z_1 = (16)^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$Z_1 = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \Rightarrow Z_1 = \sqrt{2}+\sqrt{2}i$$

$$\frac{\pi+2\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$Z_2 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= 2\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -\sqrt{2}+\sqrt{2}i$$

عندما $k=2$

$$\frac{\pi+4\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

$$Z_3 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + \sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$= 2\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -\sqrt{2}-\sqrt{2}i$$

عندما $k=3$

$$\frac{\pi+6\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

$$Z_4 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + \sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}-\sqrt{2}i$$









مثال 4 أوجد قيم $(-64\,i)^{\frac{1}{6}}$ باستخدام مبرهنة ديموافر.

$$0-64i \rightarrow \underset{(x,y)}{(0,-64)} \quad , \quad n=6$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$r=\sqrt{0+(-64)^2} \Rightarrow r=64$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{0}{64}=0$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-64}{64}=-1$$

$$\theta=\frac{3\pi}{2}$$

$$Z^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right]$$

عندما $k=0$

$$\frac{\frac{3\pi}{2}+0}{6}=\frac{3\pi}{12}=\frac{\pi}{4}$$

$$Z_1=(64)^{\frac{1}{6}}\left[\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right]$$

$$2\left(\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt2}i\right) \Rightarrow Z_1=\sqrt2+\sqrt2 i$$

عندما $k=1$

$$\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi}{6}=\frac{\frac{3\pi+4\pi}{2}}{6}=\frac{7\pi}{12}$$

$$Z_2=2\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$

عندما $k=2$

$$\frac{\frac{3\pi}{2}+4\pi}{6}=\frac{\frac{3\pi+8\pi}{2}}{6}=\frac{11\pi}{12}$$

$$Z_3=2\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$$

عندما $k=3$

$$\frac{\frac{3\pi}{2}+6\pi}{6}=\frac{\frac{3\pi+12\pi}{2}}{6}=\frac{15\pi}{12}$$

$$\frac{5\pi}{4}$$

$$Z_4=2\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$Z_4=2\left(-\frac{1}{\sqrt2}-\frac{1}{\sqrt2}i\right) \Rightarrow Z_4=-\sqrt2-\sqrt2 i$$

عندما $k=4$

$$\frac{\frac{3\pi}{2}+8\pi}{6}=\frac{19\pi}{12}$$

$$Z_5=2\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$$

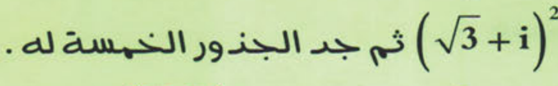
عندما $k=5$

$$\frac{\frac{3\pi}{2}+10\pi}{6}$$

$$\frac{23\pi}{12}$$

$$Z_6=2\left(\cos\frac{23\pi}{12}+i\sin\frac{23\pi}{12}\right)$$



مثال 5 أوجد الصيغة القطبية للمقدار $\left(\sqrt{3}+i\right)^2$ ثم جد الجذور الخمسة له .

(x,y)

$\sqrt{3}+i \rightarrow \left(\sqrt{3},1\right)$ الربع الأول

$r=\sqrt{x^2+y^2}$

$r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(1)^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}$

$r=2$

$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ زاوية الأسناد $\frac{\pi}{6}$

$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{2}$ ربع أول $\theta=\frac{\pi}{6}$

$Z^n=r^n\ (\cos\theta+\sin\theta)^n$

$Z^2=2^2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^2$

$Z^2=4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

الجذور الخمسة $Z^{\frac{1}{5}}$

$Z^{\frac{1}{5}}=4^{\frac{1}{5}}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{1}{5}}$

$Z^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right]$

عندما $k=0$

$\frac{\frac{\pi}{3}+0}{5}=\frac{\pi}{15}$

$Z_1=\sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\pi}{15}+i\sin\frac{\pi}{15}\right)$

عندما $k=1$ $\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi}{5}=\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi}{5}=\frac{7\pi}{15}$

$Z_2=\sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{7\pi}{15}+i\sin\frac{7\pi}{15}\right)$

عندما $k=2$ $\frac{\frac{\pi}{3}+4\pi}{5}=\frac{13\pi}{15}$

$Z_3=\sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{13\pi}{15}+i\sin\frac{13\pi}{15}\right)$

عندما $k=3$ $\frac{\frac{\pi}{3}+6\pi}{5}=\frac{19\pi}{15}$

$Z_4=\sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{19\pi}{15}+i\sin\frac{19\pi}{15}\right)$

عندما $k=4$ $\frac{\frac{\pi}{3}+8\pi}{5}=\frac{25\pi}{15}=\frac{5\pi}{3}$

$Z_5=\sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

$Z_5=\sqrt[5]{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

استخرجنا قيم sin , cos لأن الزاوية خاصة





مثال 6 حل المعادلة $x^3 + 1 = 0$ باستخدام مبرهنة ديموافر .

$x^3 = -1$ بالجذر التكعيبي

$$x = \sqrt[3]{-1} \Rightarrow x = (-1 + 0i)^{\frac{1}{3}}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (0)^2} \Rightarrow r = 1$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{-1}{1} = -1 \\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0 \end{aligned}\right] \theta = \pi$$

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos\theta + i\sin\theta\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right]$$

عندما $k = 0 \quad \frac{\pi + 0}{3} = \frac{\pi}{3}$

$$Z_1 = (1)^{\frac{1}{3}} \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$Z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

عندما $k = 1 \quad \frac{\pi + 2\pi}{3} = \frac{3\pi}{3} = \pi$

$$Z_2 = (1)^{\frac{1}{3}} (\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$Z_2 = -1 + 0i$$

عندما $k = 2$

$$\theta = \frac{\pi + 4\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{3}$$

$$Z_3 = (1)^{\frac{1}{3}} \left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$Z_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

* يمكن ان يكون منطوق السؤال بصيغ مختلفة مثل :

أولاً : باستخدام ديموافر جد الجذور التكعيبية للعدد (1-) معناها

$$x^3 = -1 \Rightarrow (-1 + oi)^{\frac{1}{3}}$$

ثانياً : باستخدام ديموافر جد الجذور التكعيبية للعدد (8i) معناها

$$x^3 = 8i \Rightarrow (o + 8i)^{\frac{1}{3}}$$

لذلك إنتبه جيداً لمنطوق السؤال.

الأسئلة الوزارية حول موضوع المقياس والسعة والصيغة القطبية ومبرهنة ديموافر

سؤال 1 إذا كان $Z = (-\sqrt{3}, 1)$ عدداً مركباً أكتب الشكل الجبري له ثم جد مقياسه والقيمة الاساسية للسعة.

2002 - د (2)

$$Z = -\sqrt{3} + i \rightarrow \underset{(x,y)}{(-\sqrt{3}, 1)}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4}$$

$r = 2$ ((المقياس))

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}$$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{6}$ / الربع الثاني

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{2}$$ ((السعة))

سؤال 2 إذا كان $(-1 + \sqrt{3}i)$ عدداً مركباً جد مقياسه والقيمة الاساسية لسعته.

2008 خارج القطر

$$Z = -1 + \sqrt{3}i \rightarrow \underset{(x,y)}{(-1, \sqrt{3})}$$ الربع الثاني

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} \Rightarrow r = 2$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{3}$ / الربع الثاني

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

سؤال 3 ضع المقدار $\frac{7+\sqrt{3}i}{1+2\sqrt{3}i}$ بالصيغة العادية للعدد المركب ثم جد مقياسه وسعته الأساسية.

2001 - د (1)

$$Z = \frac{7+\sqrt{3}i}{1+2\sqrt{3}i} \cdot \frac{1-2\sqrt{3}i}{1-2\sqrt{3}i}$$

$$Z = \frac{7-14\sqrt{3}i+\sqrt{3}i+6}{(1)^2+(2\sqrt{3})^2} = \frac{13-13\sqrt{3}i}{13}$$

$$Z = \frac{13}{13} - \frac{13\sqrt{3}i}{13} \Rightarrow Z = 1 - \sqrt{3}i$$

$$Z = \underset{(x,y)}{(1, -\sqrt{3})}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4}$$

$r = 2$ ((المقياس))

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{3}$ / الربع الرابع

$$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{3}$$ ((السعة))

سؤال 4 جد المقياس والقيمة الاساسية للسعة للعدد المركب $\frac{2i}{1+i}$

2007 - د (2)

$$Z = \frac{2i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} \Rightarrow Z = \frac{2i - 2i^2}{(1)^2 + (1)^2}$$

$$Z = \frac{2+2i}{2} \Rightarrow Z = 1+i \qquad \begin{matrix}(1,1)\\(x,y)\end{matrix}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(1)^2+(1)^2} \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{4}$ / الربع الأول

السعة $\theta = \frac{\pi}{4}$

سؤال 5 جد المقياس والقيمة الاساسية للسعة للعدد المركب $\frac{4}{1-\sqrt{3}i}$

2008 - د (2)

$$Z = \frac{4}{1-\sqrt{3}i} \cdot \frac{1+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}$$

$$Z = \frac{4(1+\sqrt{3}i)}{(1)^2+(\sqrt{3})^2} = \frac{\not{4}(1+\sqrt{3}i)}{\not{4}}$$

$$Z = 1+\sqrt{3}i \rightarrow (1,\sqrt{3})$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(1)^2+(\sqrt{3})^2} \Rightarrow r = 2$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{3}$ / الربع الأول

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

سؤال 6 جد المقياس والقيمة الاساسية للسعة للعدد المركب $(1+\sqrt{3}i)$

2008 - د (1)

إنتبه ! يجب وضع العدد المركب بصيغة a+bi والتخلص من التربيع .

$$Z = 1 + 2\sqrt{3}i - 3 \Rightarrow Z = -2 + 2\sqrt{3}i$$

$$Z = (-2, 2\sqrt{3})$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12}$$

$r = 4$ ((المقياس))

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{3}$ / الربع الثاني

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

سؤال 7 إذا كان $Z = 1+\sqrt{3}i$ عدداً مركباً اكتب الشكل الديكارتي له ثم جد القياس والسعة .

2006 - د (2)

$$Z = 1+\sqrt{3}i \rightarrow (1,\sqrt{3})$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(1)^2+(\sqrt{3})^2} \Rightarrow r = 2$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{3}$ / الربع الأول

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

سؤال 8 إذا كان عدداً مركباً مقياسه 3 وسعته $\frac{\pi}{3}$ جد الشكل الديكارتي والجبري له .

2003 - د (2)

$r = 3, \quad \theta = \frac{\pi}{3}$

$x = r \cdot \cos\theta$

$x = 3\cos\frac{\pi}{3} = 3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$

$y = r \cdot \sin\theta$

$y = 3 \sin\frac{\pi}{3} = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$Z = \left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ ((الديكارتي)) , $Z = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ ((الجبري))



سؤال 9 إذا كان عدداً مركباً مقياسه (4) وسعته $\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ جد الشكل الديكارتي والجبري له .

2006 - د (1)

$r = 4 \quad , \quad \theta = \frac{5\pi}{6}$

$x = r \cdot \cos\theta$

$x = 4 \cdot \cos\frac{5\pi}{6} = 4\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3}$

$y = r \cdot \sin\theta$

$y = 4\sin\frac{5\pi}{6} = 4\left(\frac{1}{2}\right) = 2$

$Z = \left(-2\sqrt{3}, 2\right)$ ((الديكارتي)) , $Z = -2\sqrt{3} + 2i$ ((الجبري))

سؤال 10 أكتب الصيغة القطبية للعدد المركب $3 - 3\sqrt{3}i$

2015 - د (3)

$Z = 3\sqrt{3}i \rightarrow Z = \left(3, -3\sqrt{3}\right)$

(x, y) الربع الرابع

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$r = \sqrt{(3)^2 + (-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 27} = \sqrt{36}$

$r = 6$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\sin\theta = \frac{y}{2} = \frac{-3\sqrt{3}}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

زاوية الأسناد هي $\frac{\pi}{3}$

$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{3}$

$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$Z = 6\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

سؤال 11 جد الصيغة القطبية للعدد المركب $5 - 5i$

2014 - د (3)

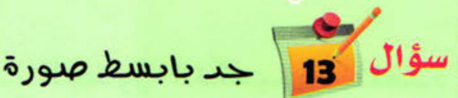
$Z = 5 - 5i \rightarrow (5, -5)$ الربع الرابع

(x, y)

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$r = \sqrt{(5)^2 + (-5)^2} = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50}$

$r = 5\sqrt{2}$



$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-5}{5\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{4}$ الربع الرابع

$$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{4}$$

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$Z = 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

سؤال 12 أكتب العدد $Z=\left(1+\sqrt{3}i\right)^2$ بالصيغة القطبية .

2016 - د (1) خارج القطر

$$Z = \left(1+\sqrt{3}i\right)^2 = 1 + 2\sqrt{3}i - 3$$

$$= -2 + 2\sqrt{3}i \quad \left(\overset{-}{-2}, \overset{+}{2\sqrt{3}}\right) \; (x, y)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16}$$

$$r = 4$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{3}$ الربع الثاني

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$Z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

تنويه ! لو قال باستخدام ديموافر لا نفتح التربيع ونحل ديموافر n=2

سؤال 13 جد بابسط صورة

2015 - د (1) خارج القطر

a $$\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)^{-3}$$

$$\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}.(-3)\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}.(-3)\right)\right]$$

$$\cos\frac{7\pi}{4} - i\sin\frac{7\pi}{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} - \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}i\right) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

b $$(\cos\theta + i\sin\theta)^8 (\cos\theta - i\sin\theta)^4$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^8 . (\cos\theta + i\sin\theta)^{-4}$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^4 = \cos 4\theta + i\sin 4\theta$$



سؤال 14 هل أن :

2016 - د (2) خارج القطر

$$\frac{(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)^5}{(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)^2} - (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = 0$$

$$\frac{\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^2\right]^5}{\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^4\right]^2} - (\cos\theta + i\sin\theta)^2$$

$$\frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^{10}}{(\cos\theta + i\sin\theta)^8} - (\cos\theta + i\sin\theta)^2$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 - (\cos\theta + i\sin\theta)^2$$

$$= 0$$




سؤال 15 جد الجذور التكعيبية للعدد $125i$ باستخدام مبرهنة ديموافر

(2015 - د (1))

$Z = 0 + 125i \qquad (0, 125)$
(x, y)

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$r = \sqrt{(0)^2 + (125)^2} \Rightarrow r = 125$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{0}{125} = 0$

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{125}{125} = 1$

$\theta = \frac{\pi}{2}$

$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} (\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{1}{n}}$

$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right]$

عندما $k = 0 \qquad \frac{\frac{\pi}{2} + 0}{3} = \frac{\pi}{6}$

$Z_1 = 125^{\frac{1}{3}} \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$Z_1 = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \Rightarrow Z_1 = \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$

عندما $k = 1 \qquad \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} = \frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$

$Z_2 = 5\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

$Z_2 = 5\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \Rightarrow Z_2 = \frac{-5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$

$k = 2 \qquad \frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} = \frac{\frac{\pi + 8\pi}{2}}{3} = \frac{3\pi}{2}$

$Z_3 = 5\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

$Z_3 = 5(0 - i) \Rightarrow Z_3 = -5i$

سؤال 16 جد الجذور التكعيبية للعدد المركب $(1 + i)^2$ على وفق مبرهنة ديموافر.

(2015 - د (2) خارج القطر)

$Z = 1 + i \rightarrow Z = (1, 1)$ الربع الأول
(x, y)

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$r = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} \Rightarrow r = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

زاوية الأسناد

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta = \frac{\pi}{4}$

$Z^n = r^n (\cos\theta + i\sin\theta)^n$

$Z^n = \left(\sqrt{2}\right)^2 \left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]^2$

$Z^2 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}.2\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}.2\right)\right]$

$Z^2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$$Z^2 = 2(0+i) \Rightarrow Z^2 = 0+2i$$

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right]$$

الجذور التكعيبية $(Z^2)^{\frac{1}{3}}$

$$(Z^2)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right]^{\frac{1}{3}}$$

عندما $k=0$ $\quad \dfrac{\frac{\pi}{2}+0}{3} = \dfrac{\pi}{6}$

$$Z_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\boxed{Z_1 = \sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)}$$

عندما $k=1$ $\quad \dfrac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3} = \dfrac{\frac{\pi+4\pi}{2}}{3} = \dfrac{5\pi}{6}$

$$Z_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$\boxed{Z_2 = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)}$$

عندما $k=2$ $\quad \dfrac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3} = \dfrac{\frac{\pi+8\pi}{2}}{3} = \dfrac{9\pi}{6} = \dfrac{3\pi}{6}$

$$Z_3 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\boxed{Z_3 = \sqrt[3]{2}(0-i)}$$

سؤال 16 جد الصيغة القطبية للجذور الخمسة للعدد المركب $\left(\sqrt{3}+i\right)^2$. **2014 - د (1)**

الربع الأول $\quad Z = \sqrt{3}+i \rightarrow Z = \left(\sqrt{3}, 1\right)$ (x, y)

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2+(1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4}$$

$$\boxed{r = 2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}$$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{6}$

الربع الأول $\theta = \frac{\pi}{6}$

$$Z^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

$$Z^2 = (2)^2\left[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right]^2$$

$$Z^2 = 4\left(\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

سيتم تعويض الدواب مباشرة بشكل مختصر

$$k = 0, 1, 2, 3, 4, \theta = \frac{\pi}{3}, r = 4, n = 5$$

الجذور الخمسة

$$k=0 \Rightarrow Z_1 = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}\right)$$

$$k=1 \Rightarrow Z_2 = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{7\pi}{15} + i\sin\frac{7\pi}{15}\right)$$

$$k=2 \Rightarrow Z_3 = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{13\pi}{15} + i\sin\frac{13\pi}{15}\right)$$

$$k=3 \Rightarrow Z_4 = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{19\pi}{15} + i\sin\frac{19\pi}{15}\right)$$

$$k=4 \Rightarrow Z_5 = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{25\pi}{15} + i\sin\frac{25\pi}{15}\right)$$

$$= \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

لانستخرج قيم الـ $\cos$ $\sin$ لأنه طلب صيغة قطبية .

سؤال 18 باستخدام مبرهنة ديموافر جد الجذور التكعيبية للعدد 8i

2015 - د (1) نازحين

2016 - د (1)

$Z = 0 + 8i \rightarrow \underset{(x,y)}{(0,8)}$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$r = \sqrt{(0)^2 + (8)^2} = \sqrt{0 + 64} \Rightarrow r = 8$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{0}{8} = 0$

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{8}{8} = 1$

$\theta = \frac{\pi}{2}$

$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right]$

عندما $k = 0 \ , \ \theta = \frac{\frac{\pi}{2} + 0}{2} = \frac{\pi}{6}$

$Z_1 = 8^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$Z_1 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

$Z_1 = \left(\sqrt{3} + i\right)$

عندما $k = 1 \ , \ \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} = \frac{\frac{\pi + 4\pi}{2}}{3} = \frac{5\pi}{6}$

$Z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

$Z_2 = \left(-\sqrt{3} + i\right)$

$k = 2 \ , \ \frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} = \frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$

$Z_3 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = 2(0 - i)$

$Z_3 = -2i$

سؤال 19 جد مجموعة حل المعادلة في مجموعة الاعداد لمركبة باستخدام مبرهنة ديموافر $x^3 - 8i = 0$.

الجذر التربيعي $x^3 - 8i = 0 \Rightarrow x^3 = 8i$

$x = (8i)^{\frac{1}{3}}$

نفس الحل في سؤال (18) تماماً .



سؤال 20 باستخدام ديموافر احسب

$\cdot\left(\sqrt{3}+i\right)^{\frac{-3}{2}}$

$\sqrt{3}+i \Rightarrow \left(\sqrt{3}+1\right)$ الربع الاول

أولاً: القوس كسر والبسط $\neq 1$ لذلك هذا السؤال مبرهنة + نتيجة

مبرهنة $\left[\left(\sqrt{3}+i\right)^{-3}\right]^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \left(\sqrt{3}+i\right)^{-3}$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(1)^2}$$

$$=\sqrt{4} \Rightarrow \boxed{r=2}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-1}{2}$$

زاوية الاسناد $\frac{\pi}{6}$

$\theta =$ زاوية الاسناد $\Rightarrow \theta\frac{\pi}{6}$

$$Z^n=r^n\left[\cos\theta+i\sin\theta\right]^n$$

$$Z^{-3}=(2)^{-3}\left[\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right]^{-3}$$

$$Z^{-3}=\frac{1}{(2)^3}\left[\cos\frac{-\pi}{2}+i\sin\frac{-\pi}{2}\right]^{-3}$$

$$Z^{-3}=\frac{1}{8}\left[\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}\right]^{-3}$$

الان نرفع الناتج للأس $\frac{1}{2}$ وتحل نتيجة

$$\left(Z^{-3}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$r=2 \quad , \quad k=0,1 \quad , \quad \theta=\frac{\pi}{2}$$

$$r=\frac{1}{8}$$

$$k=0 \qquad \frac{\frac{\pi}{2}+2(0)\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$$

$$Z_1=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$Z_1=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$$

$$k=1 \qquad \frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{2}=\frac{5\pi}{4}$$

$$Z_2=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$Z_2=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

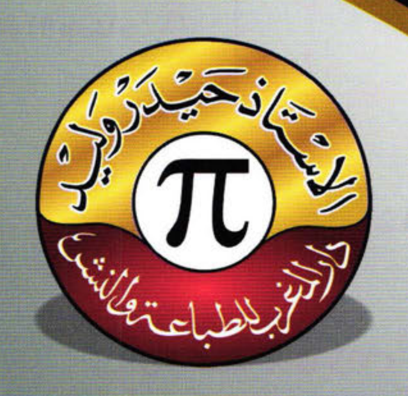
$$Z_2=\frac{-1}{4}+\frac{1}{4}i$$

المفيد في ثلاثية

حيدر وليد

الرياضيات

2019

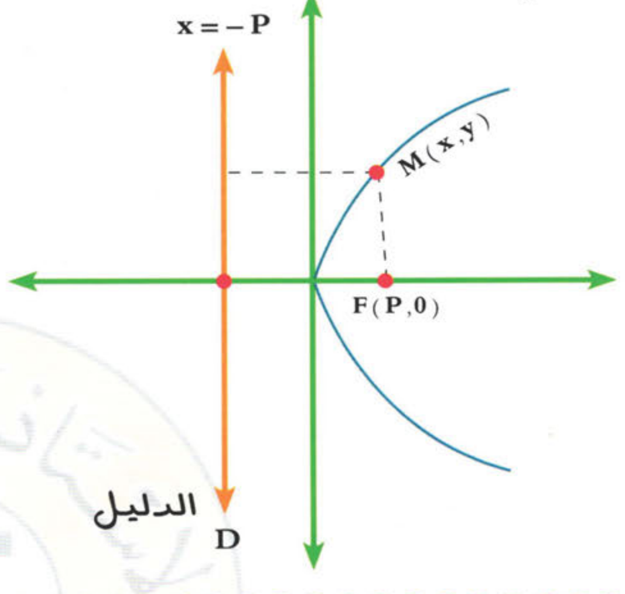


الفصل الثاني

القطوع المخروطية

القطع المكافئ

هو مجموعة النقاط في المستوي والتي يكون بعد كل منها عن نقطة ثابتة $F(P,0)$ تسمى البؤرة حيث $(P > 0)$ مساوياً دائماً لبعدها عن مستقيم معلوم (D) يسمى الدليل لا يحوي البؤرة.



البعد بين بؤرة ودليل القطع المكافئ = 2P

للقطع المكافئ أربع حالات:

	البـؤرة	معادلة الدليل	معادلة القطع القياسية
أولاً: فتحة القطع نحو اليمين	$F(P,0)$	$x = -P$	$y^2 = 4Px$
ثانياً: فتحة القطع نحو اليسار	$F(-P,0)$	$x = +P$	$y^2 = -4Px$
ثالثاً: فتحة القطع نحو الأعلى	$F(0,P)$	$y = -P$	$x^2 = 4Py$
رابعاً: فتحة القطع نحو الأسفل	$F(0,-P)$	$y = +P$	$x^2 = -4Py$

ملاحظة حول معادلة القطع المكافئ القياسية:

1. تحتوي على متغيرين x،y أحدهما تربيع والاخر اس (1).
2. القطع على محور المتغير الذي لا يحتوي تربيع.
3. معامل متغير التربيع $= 1$. أنظر إلى معامل x^2 و y^2 في المعادلات كلها $= 1$.

إذا طلب البؤرة والدليل

مثال جد البؤرة ومعادلة الدليل لكل من القطوع المكافئ الآتية :

1 $y^2 = -8x$

$y^2 = -4Px \Rightarrow [4P = 8] \div 4 \Rightarrow P = 2$

البؤرة $F(-2,0)$ ، معادلة الدليل $x = +2$

2 $x^2 = 4y$

$x^2 = -4Py \Rightarrow [4P = 4] \div 4 \Rightarrow P = 1$

البؤرة $F(0,1)$, معادلة الدليل $y = -1$

3 $2x + 16y^2 = 0$

$[16y^2 = -2x] \div 16$

$y^2 = \frac{-1}{8}x$ نحو اليسار

$y^2 = -4Px$

$\left[4P = \frac{1}{8}\right] \div 4 \Rightarrow P = \frac{1}{32}$

البؤرة $F\left(\frac{-1}{32}, 0\right)$, معادلة الدليل $x = \frac{1}{32}$

4 $\frac{1}{2}y^2 = 8x$

نضرب المعادلة اعلاه في (2) لجعل معامل y^2 يساوي واحد حسب ملاحظات معادلة القطع المكافئ القياسية .

$y^2 = 16x$

$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 16] \div 4$ يمين

$P = 4$

البؤرة $F(4,0)$, معادلة الدليل $x = -4$

5 $\frac{1}{5}x - y^2 = 0$

$\frac{1}{5}x = y^2 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{5}x$ نحو اليمين

$y^2 = 4Px$

$\left[4P = \frac{1}{5}\right] \div 4$

$P = \frac{1}{20}$

البؤرة $F\left(\frac{1}{20}, 0\right)$, معادلة الدليل $x = \frac{-1}{20}$

6 $3x^2 - 24y = 0$

$[3x^2 = 24y] \div 3 \Rightarrow x^2 = 8y$

$x^2 = 4Py$

$[4P = 8] \div 4 \Rightarrow P = 2$

البؤرة $F(0,2)$, معادلة الدليل $y = -2$

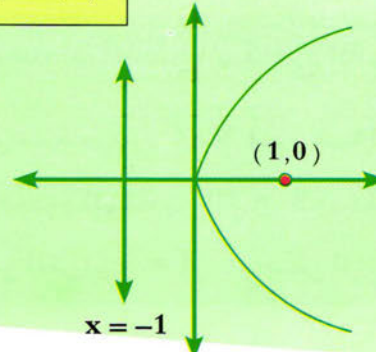
7 $y^2 = 4x$

$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 4] \div 4 \Rightarrow P = 1$

$F(1,0)$, $x = -1$

إذا طلب الرسم :
نأخذ قيم لـ x
ونعوضها بالمعادلة
ونجد y ثم نرسم .

x	y	(x,y)
0	0	(0,0)
1	±2	(1,±2)
3	$\pm 2\sqrt{3}$	$(3, \pm 2\sqrt{3})$



أولاً : إذا أعطى بؤرة القطع المكافئ F معناها أعطى P

1. نختار المعادلة المناسبة حسب البؤرة .
2. نعوض P مباشرة ⟵ **إنتبه!** نعوض P موجبة دائماً في المعادلة القياسية .

مثال 1 جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $(0,5)$ ورأسه نقطة الاصل .

$F(0,5)$ → أعلى → $P=5$

$x^2=4Py$

$x^2=4(5)y \Rightarrow x^2=20y$

مثال 4 جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل وبؤرته $(0,-4)$.

$(0,-4)$ → أسفل → $P=4$

$x^2=-4Py$

$x^2=-4(4)y \Rightarrow x^2=-16y$

مثال 2 جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $(3,0)$ ورأسه نقطة الاصل .

$F(3,0)$ → يمين → $P=3$

$y^2=4Px$

$y^2=4(3)x \Rightarrow y^2=12x$

مثال 5 جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $(5,0)$ ورأسه نقطة الاصل .

$(5,0) \Rightarrow$ يمين $\Rightarrow P=5$

$y^2=4Px$

$y^2=4(5)x \Rightarrow y^2=20x$

مثال 3 جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل وبؤرته $(0,\sqrt{2})$.

$F(0,\sqrt{2})$ → أعلى → $P=\sqrt{2}$

$x^2=4Py$

$x^2=4(\sqrt{2})y \Rightarrow x^2=4\sqrt{2}y$

مثال 6 جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $(-4,0)$ ورأسه نقطة الاصل .

$(-4,0)$ → يسار → $P=4$ نعوض $(+)$

$y^2=-4Px \Rightarrow y^2=-16x$

ثانياً : إذا أعطى معادلة الدليل معناها أعطى (P) وتذكر ان اشارة الدليل عكس اشارة البؤرة .

مثلاً : إذا اعطى معادلة الدليل

$x=+3$ البؤرة سالبة لأن الدليل + ((القطع يسار X))

$y=-5$ البؤرة موجبة لأن الدليل − ((القطع أعلى y))

$x=-\sqrt{2}$ البؤرة موجبة لأن الدليل − ((القطع يمين X))

مثال 7

جد معادلة القطع المكافئ الذي معادلة دليله $y = 7$ والرأس نقطة الاصل .

$y = 7 \rightarrow P = 7$

البؤرة سالبة لأن الدليل (+) / أسفل (y)

$x^2 = -4Py$

$x^2 = -4(7)y$

$x^2 = -28y$

مثال 8

جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ومعادلة دليله $.2x - 6 = 0$

$2x - 6 = 0$

$[2x = 6] \div 2 \Rightarrow x = 3$

البؤرة سالبة لأن الدليل موجب $P = 3$

$y^2 = -4Px \Rightarrow y^2 = -4(3)x$

$y^2 = -12x$

مثال 9

جد معادلة القطع المكافئ الذي معادلة دليله $4y + 3 = 0$ ورأسه نقطة الاصل .

$4y + 3 = 0$

$[4y = -3] \div 4 \Rightarrow y = \frac{-3}{4}$

البؤرة موجبة لأن الدليل سالب

$P = \frac{3}{4}$

$x^2 = 4Py \Rightarrow x^2 = 4\left(\frac{3}{4}\right)y$

$x^2 = 3y$

إنتبه ! لاتنسى ان تعويض P يكون موجب دائماً في المعادلة القياسية

ملاحظة ومثال إذا أعطى في السؤال نقطتين وقا ان القطع يمر بالنقطتين فإن خطوات لحل هي :

1. نعين النقاط في الارباع لتحديد فتحة القطع .
2. نختار المعادلة المناسبة حسب فتحة القطع .
3. نعوض واحدة من النقاط بـ x , y ونجد P ونعوض (P) بالمعادلة القياسية .

مثال 10

جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين (2,-4) ، (2,4) والرأس نقطة الاصل .

أول
رابع

ربع أول $\rightarrow (2,4)$

ربع رابع $\rightarrow (2,-4)$

القطع نحو اليمين .

(x,y)

$(2,4)$

$y^2 = 4Px$ ← تعويض

$(4)^2 = 4P(2)$

$[16 = 8P] \div 8 \Rightarrow P = 2$

$y^2 = 8x$

مثال 11

جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين $(2,5)$, $(2,-5)$ والرأس نقطة الاصل .

ربع أول $\rightarrow (2,5)$

ربع رابع $\rightarrow (2,-5)$

القطع نحو اليمين .

$y^2 = 4Px \qquad (2,5)$

$(5)^2 = 4(P)(2)$

$[25 = 8P] \div 8 \Rightarrow P = \frac{25}{8}$

$y^2 = 4\left(\frac{25}{8}\right)x \Rightarrow y^2 = \frac{25}{2}x$

مثال 12

جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر من $(-1,2)$ $(\sqrt{3},6)$ ولأسه نقطة الاصل ... اضافي .

ربع أول $(\sqrt{3},6)$

ربع ثاني $(-1,2)$

القطع نحو الأعلى .

نختار أي نقطة

$x^2 = 4Py \qquad (\overset{x}{\sqrt{3}},\overset{y}{6})$

$(\sqrt{3})^2 = 4P(6)$

$[3 = 24P] \div 24 \Rightarrow P = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$

$x^2 = 4\left(\frac{1}{8}\right)y \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}y$

إستراحة شعرية:

رَماك الحاسدون بكُل عَيبٍ
وعيبكُ أنّ حسنك لا يُعابُ

ملاحظة ومثال إذا أعطى نقطة واحدة فقط (x,y) وقال ان القطع يمر من النقطة (x,y) هناك حالتان :

الأولى ان يحدد موقع البؤرة (على محور السينات أو الصادات) وهنا يوجد معادلة واحدة للقطع ⟵ تابع المثال .

مثال 13 جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر من النقطة $(-1,8)$ وبؤرته على محور السينات ورأسه نقطة الأصل . . . اضافي .

$(-1,8) \rightarrow$ ربع ثاني

البؤرة سينات ⟵ يسار

$y^2 = -4Px \qquad (-1,8)$

$8^2 = -4P(-1)$

$64 = 4P \Rightarrow P = \frac{64}{4} \Rightarrow P = 16$

$y^2 = -4(16)x \Rightarrow y^2 = -64x$

مثال 14 جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر من النقطة $(\sqrt{2},1)$ وبؤرته على محور الصادات . . . اضافي .

$(\sqrt{2},1) \rightarrow$ ربع أول

البؤرة صادات ⟵ أعلى

$x^2 = 4Py \qquad (\sqrt{2},1)$

$(\sqrt{2})^2 = 4P(1)$

$[2 = 4P] \div 4 \Rightarrow P = \frac{1}{2}$

$x^2 = 4\left(\frac{1}{2}\right)y \Rightarrow x^2 = 2y$

الثانية لا يحدد موقع البؤرة لذلك هناك احتمالين
- بؤرة سينات
- بؤرة صادات

مثال 15 جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر من النقطة $(-2,-4)$ ورأسه نقطة الأصل .

بؤرة سينات/ يسار

$y^2 = -4Px$

$(-4)^2 = -4P(-2)$

$[16 = 8P] \div 8 \Rightarrow P = \frac{16}{8} \Rightarrow P = 2$

$y^2 = -8x$

بؤرة صادات/ اسفل

$x^2 = -4Py$

$(-2)^2 = -4P(-4)$

$[4 = 16P] \div 16 \Rightarrow P = \frac{4}{16} \Rightarrow P = \frac{1}{4}$

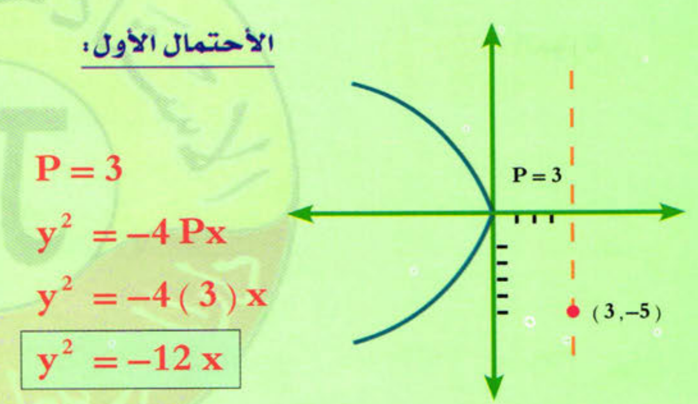
$x^2 = -\not{4}\left(\frac{1}{\not{4}}\right)y \Rightarrow x^2 = -y$

ملاحظة ومثال إذا أعطى في السؤال نقطة (x, y) وقال ان دليل القطع يمر من هذه النقطة .

إنتبه ! لا نعوض هذه النقطة أبداً في معادلة القطع المكافئ القياسية لأن القطع لا يمر بها ولا تحققت معادلة القطع .

مثال 16 جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر دليل القطع بالنقطة $(3,-5)$.

الأحتمال الأول:



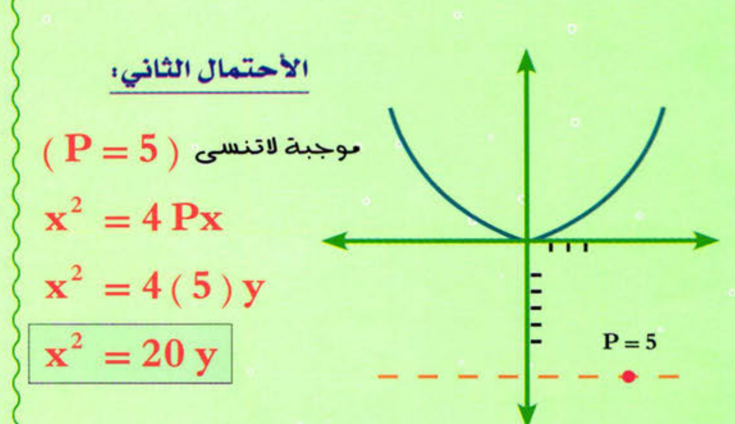
$P = 3$

$y^2 = -4Px$

$y^2 = -4(3)x$

$\boxed{y^2 = -12x}$

الأحتمال الثاني:



$(P = 5)$ موجبة لاتنسى

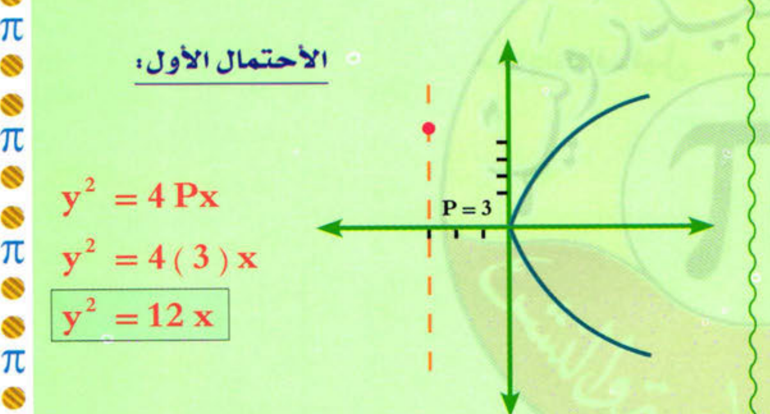
$x^2 = 4Px$

$x^2 = 4(5)y$

$\boxed{x^2 = 20y}$

مثال 17 إذا كان دليل القطع المكافئ يمر بالنقطة $(-3,4)$ والرأس نقطة الأصل جد معادلة القطع .

الأحتمال الأول:

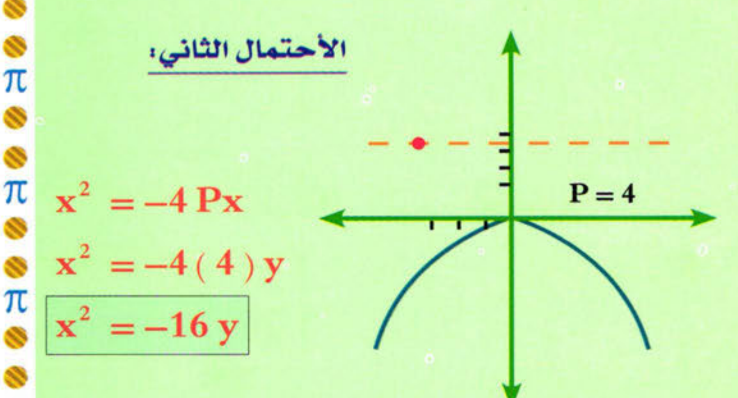


$y^2 = 4Px$

$y^2 = 4(3)x$

$\boxed{y^2 = 12x}$

الأحتمال الثاني:

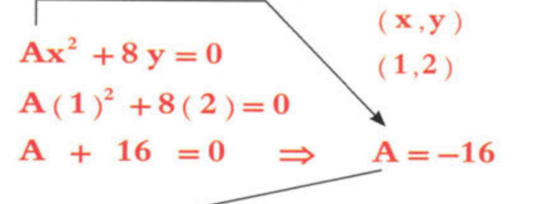


$x^2 = -4Px$

$x^2 = -4(4)y$

$\boxed{x^2 = -16y}$

مثال 18 قطع مكافئ معادلته $Ax^2 + 8y = 0$ ويمر من النقطة $(1,2)$ جد قيمة (A) ثم جد البؤرة والدليل وارسم القطع.

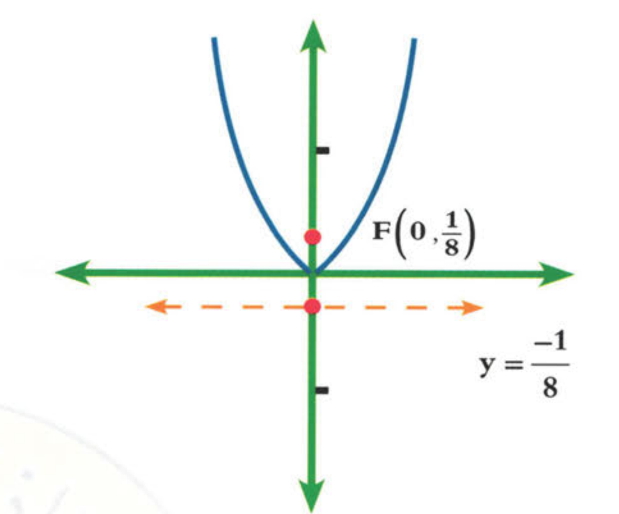


(x,y)
$(1,2)$

$Ax^2 + 8y = 0$

$A(1)^2 + 8(2) = 0$

$A + 16 = 0 \Rightarrow A = -16$



$-16x^2 + 8y = 0 \Rightarrow \left[-16x^2 = -8y\right] \div -16$

$\frac{-16x^2}{-16} = \frac{-8y}{-16} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}y$ أعلى

$x^2 = 4Py$

$\left[4P = \frac{1}{2}\right] \div 4$

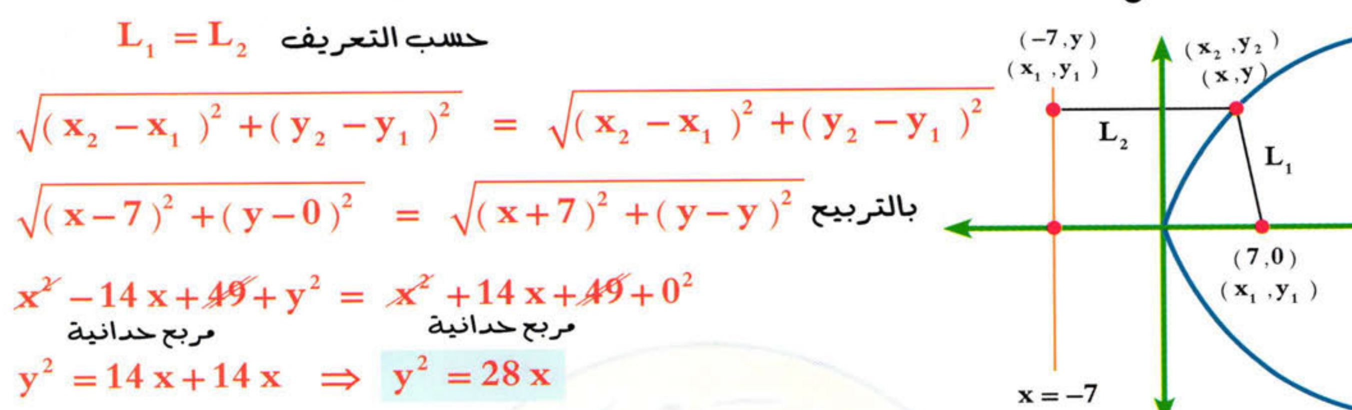
$P = \frac{1}{8}$

البؤرة $F\left(0,\frac{1}{8}\right)$ معادلة الدليل $y = \frac{-1}{8}$

إيجاد معادلة القطع المكافئ باستخدام التعريف

مثال 19

باستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $(7,0)$ والرأس نقطة الأصل.



حسب التعريف $L_1 = L_2$

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$\sqrt{(x-7)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x+7)^2+(y-y)^2}$$ بالتربيع

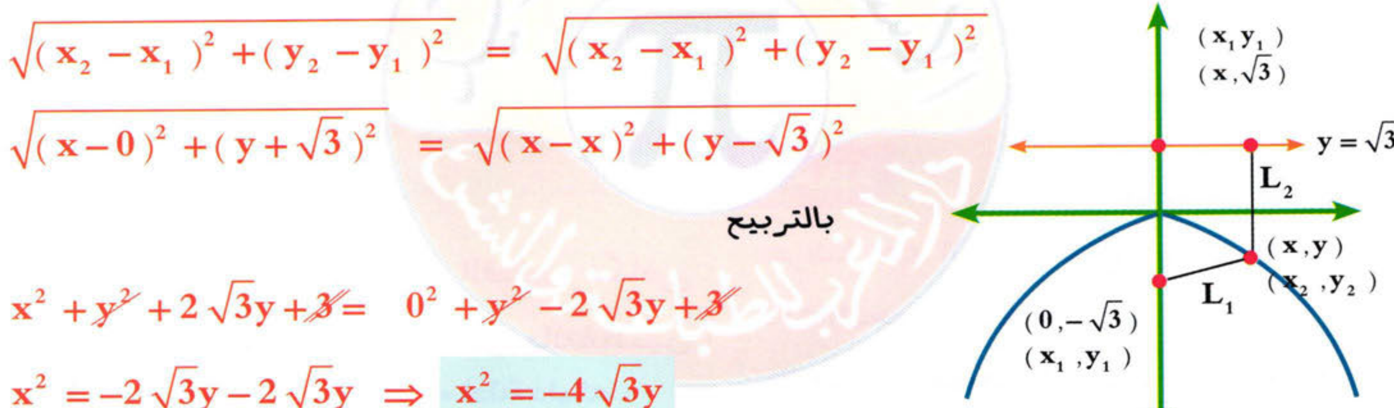
$$x^2-14x+49+y^2 = x^2+14x+49+0^2$$

مربع حدانية   مربع حدانية

$$y^2 = 14x+14x \Rightarrow y^2 = 28x$$

مثال 20

جد معادلة القطع المكافئ الذي معادلة دليله $y=\sqrt{3}$ باستخدام التعريف.



$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$\sqrt{(x-0)^2+(y+\sqrt{3})^2} = \sqrt{(x-x)^2+(y-\sqrt{3})^2}$$

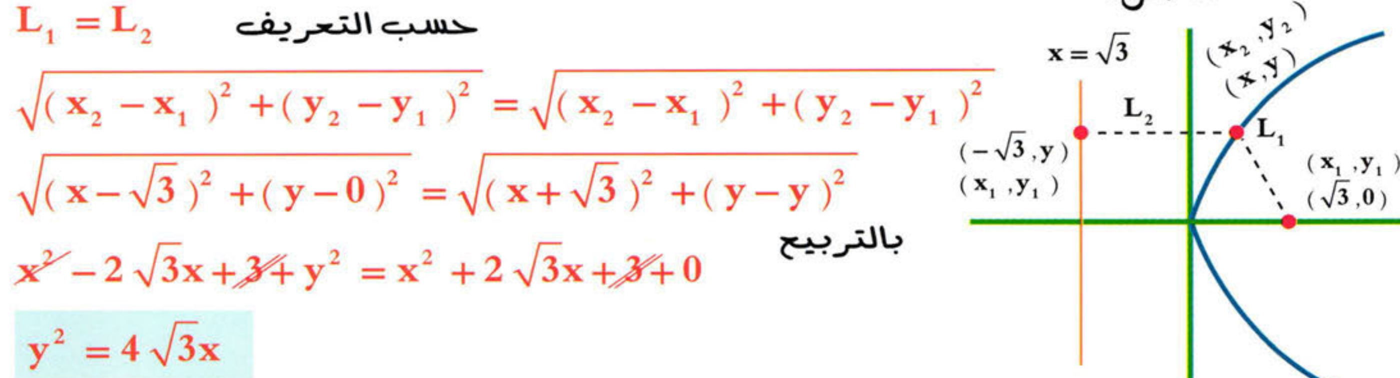
بالتربيع

$$x^2+y^2+2\sqrt{3}y+3 = 0^2+y^2-2\sqrt{3}y+3$$

$$x^2 = -2\sqrt{3}y-2\sqrt{3}y \Rightarrow x^2 = -4\sqrt{3}y$$

مثال 21

باستخدام التعريف جد معادلة قطع مكافئ بؤرته $(\sqrt{3},0)$ والرأس نقطة الأصل.



حسب التعريف $L_1 = L_2$

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$\sqrt{(x-\sqrt{3})^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x+\sqrt{3})^2+(y-y)^2}$$

بالتربيع

$$x^2-2\sqrt{3}x+3+y^2 = x^2+2\sqrt{3}x+3+0$$

$$y^2 = 4\sqrt{3}x$$



الأسئلة الوزارية حول موضوع القطع المكافئ

سؤال 1 جد معادلة القطع مكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $(-3,6)$, $(3,6)$ ثم جد معادلة دليله.

2006 - د (1)

$(3,6) \rightarrow$ ربع أول

$(-3,6) \rightarrow$ ربع رابع

(x,y)
$(3,6)$

$x^2 = 4Py$ ((نحو الأعلى)) تعريف

$(3)^2 = 4P(6)$

$9 = 24P \Rightarrow P = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$

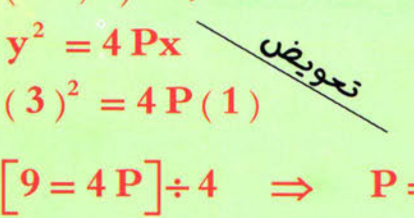
$x^2 = 4\left(\frac{3}{8}\right)y \Rightarrow x^2 = \frac{3}{2}y$

معادلة الدليل $y = -P \Rightarrow y = -\frac{3}{8}$

سؤال 2 جد معادلة القطع مكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $(1,3)$, $(1,-3)$ ثم جد معادلة دليله.

2006 - د (2)

$(1,3)$
$(3,6) \rightarrow$ ربع أول
$(1,-3)$
$(-3,6) \rightarrow$ ربع رابع
((نحو اليمين))



$y^2 = 4Px$ تعويض

$(3)^2 = 4P(1)$

$[9 = 4P] \div 4 \Rightarrow P = \frac{9}{4}$

$y^2 = 4\left(\frac{9}{4}\right)x \Rightarrow y^2 = 9x$

معادلة الدليل $x = -P \rightarrow x = \frac{-9}{4}$

سؤال 3 قطع مكافئ معادلته $\frac{1}{4}y^2 = hx$ دليله يمر بالنقطة $(-6,3)$ جد قيمة h.

2008 تمهيدي

$\left[\frac{1}{4}y^2 = hx\right].4$

$y^2 = 4hx$

$P = 6$

$y^2 = 4(6)x$

$y^2 = 24x$

$y^2 = 4hx \Rightarrow 4h = 24$

$h = 6$

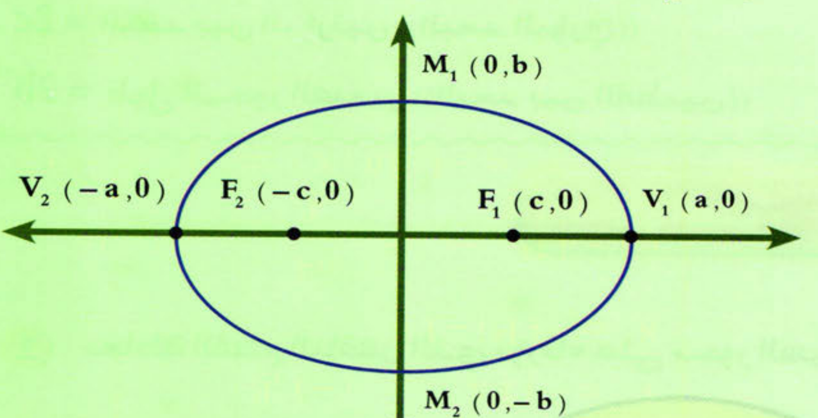
ملاحظة

عرفنا ان القطع على محور السينات لأن المعدلة بدلالة (y^2).
ولا يمكن تعويض النقطة $(-6,3)$ لأن الذي يمر بها الدليل وليس القطع.

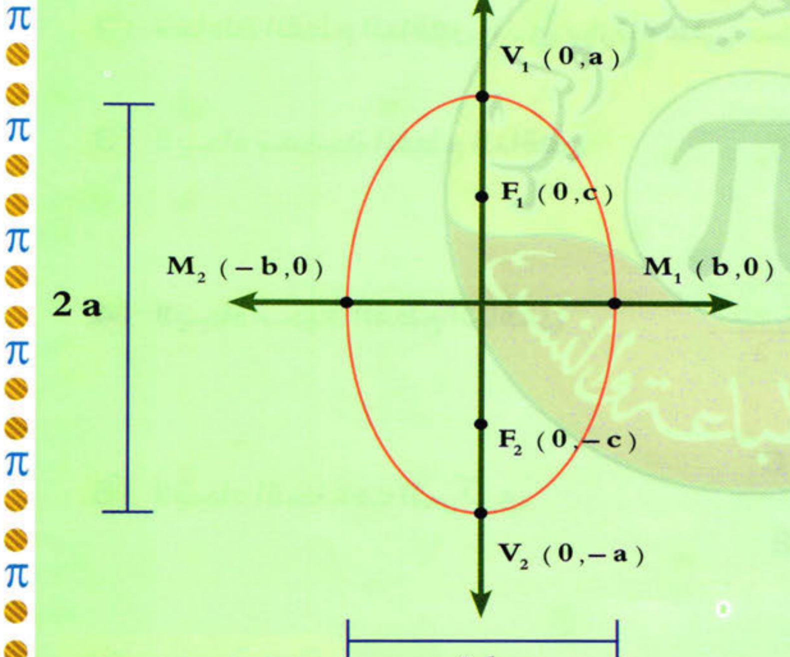
القطع الناقص Ellipse

تعريف: هو مجموعة النقط على المستوي التي يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتين (البؤرتان) عدد ثابت .

المصطلحات والرموز:



((قطع ناقص بؤرتاه تنتميان لمحور السينات))

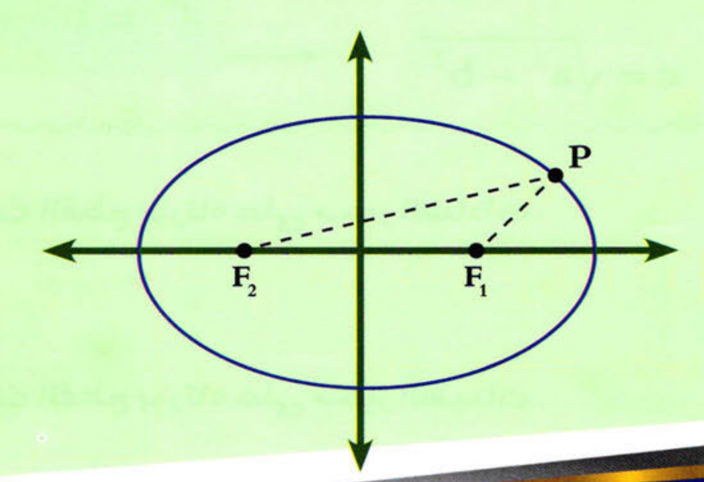


((قطع ناقص بؤرتاه تنتميان لمحور الصادات))

الرأسان ← $V_1\ ,\ V_2$

البؤرتان ← $F_1\ ,\ F_2$

القطبان ← $M_1\ ,\ M_2$



$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

$PF_1 + PF_2$ / مجموع بعدي نقطة عن بؤرتيه

بعض الرموز

$2a$ = طول المحور الكبير ((البعد بين الرأسين)) ... ((العدد الثابت))

$2c$ = البعد بين البؤرتين ((البعد البؤري))

$2b$ = طول المحور الصغير ((البعد بين القطبين))

قوانين

1. معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه على محور السينات $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

2. معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه على محور الصادات $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

3. لايجاد مساحة القطع الناقص $A=a\,b\,\pi$

4. لايجاد محيط القطع الناقص $P=2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

5. لايجاد الاختلاف المركزي $e=\frac{c}{a}$ ، $e<1$ أصغر من (1)

6. القانون العام للقطع الناقص $a^2=b^2+c^2$

$\longrightarrow b=\sqrt{a^2-c^2}$

$\longrightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}$

* معادلة المحور الكبير $x=0$
معادلة المحور الصغير $y=0$
إذا كان القطع بؤرتاه على محور الصادات .

* معادلة المحور الكبير $y=0$
معادلة المحور الصغير $x=0$
إذا كان القطع بؤرتاه على محور السينات .

ملاحظات حول القطع الناقص

أولاً: عندما يعطي:
- بؤرة يعني c
- رأس يعني a
- قطب يعني b

ثانياً: إذا اعطى :

1. طول المحور الكبير مثلاً (12) ← $2a = 12$ ونجد a
2. طول المحور الصغير مثلاً (16) ← $2b = 16$ ونجد b
3. المسافة بين البؤرتين ((البعد البؤري)) مثلاً (8) ← $2c = 8$ ونجد c

---

ثالثاً: كيف نحول الكلام الى صيغة رياضية ؟ ← تابع بعض العبارات :

1. مجموع طولي محوريه ← $2a + 2b$
2. مجموع مربعي طولي محوريه ← $(2a)^2 + (2b)^2$
3. الفرق بين طولي محوريه ← إذا كان الفرق (+) $2a - 2b$ ، إذا كان الفرق (−) $2b - 2a$
4. النسبة :

النسبة بين طولي محوريه:
- $\frac{2a}{2b}$ عندما النسبة أكبر من (1) أو $\frac{\text{رقم كبير}}{\text{رقم صغير}}$
- $\frac{2b}{2a}$ عندما النسبة أصغر من (1) أو $\frac{\text{رقم صغير}}{\text{رقم كبير}}$

مثلاً :

النسبة بين طول محوره الكبير الى البعد بين البؤرتين $\frac{2a}{2c}$

بسط (2a) ، مقام (2c)

مثلاً :

النسبة بين البعد بين بؤرتيه الى طول محوره الصغير $\frac{2c}{2b}$

بسط (2c) ، مقام (2b)

بعد كلمة إلى يصبح مقام دائماً

إنتبه ! a أكبر من b أكبر من c دائماً

$a > c \quad , \quad a > b$

إنتبه ! الاختلاف المركزي e أصغر من (1) إذا إعطى اختلاف أصغر من (1) ولم يذكر نوع القطع فهذا القطع ناقص .

بعض المصطلحات الاضافية: كي تتعلم كيف تحول الكلام الى علاقة رياضية:

* مجموع طول محوره الكبير ونصف طول محوره الصغير $2a + \frac{1}{2}(2b)$

طول محوره الكبير ← $2a$ ، مجموع ← $+$ ، نصف طول محوره الصغير ← $\frac{1}{2}(2b)$

* طول محوره الكبير يزيد على طول محوره الصغير بمقدار (4) $2a - 2b = 4$

* طول محوره الكبير ثلاثة امثال طول محوره الصغير $2a = 3(2b)$

محوره الكبير ← $2a$ ، ثلاثة امثال ← 3 ، محوره الصغير ← $(2b)$

إذا اعطى ((المساحة – المحيط – الاختلاف المركزي)) نستفاد من قوانين هذه المعطيات لإيجاد علاقة أو معادلة.

* حاول دائماً في حاله الربط بين القطع الناقص والمكافئ ان تجد (P) من معادلة القطع المكافئ لانها سوف تمثل a أو b أو c للناقص حسب السؤال.



العلاقة بين القطعين المكافئ والناقص

جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ ... الخ .

$$c_{\text{ناقص}} = P_{\text{مكافئ}}$$

جد معادلة القطع الناقص الذي احد راسيه هو بؤرة القطع المكافئ ... الخ .

$$a_{\text{ناقص}} = P_{\text{مكافئ}}$$

جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه تنطبق على بؤرة القطع المكافئ ... الخ .

$$c_{\text{ناقص}} = P_{\text{مكافئ}}$$

ملاحظة هامة

1. كل يمر $(x, 0)$, $(0, y)$ تعني اما (a) أو (b) شرط ان يكون اما $x = 0$ أو $y = 0$
   سوف يمثل اما (a) أو (b)

2. كل يمس سوف يمثل اما (a) أو (b)

   * جد معادلة القطع الناقص الذي يمس دليل القطع المكافئ ... الخ .

   يمس: أما a أو b ، P ← سوف يمثل اما (a) أو (b)

3. كل يقطع عند رقم $x = \pm$ أو رقم $y = \pm$ هذا الرقم يمثل (a) أو (b) ويؤخذ موجب .

4. عندما يذكر عبارة نقطة التقاطع مع محور السينات أو الصادات :

(a) نقطة التقاطع مع محور السينات $y = 0$

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه نقطة تقاطع المستقيم $2x - y = 8$ مع محور السينات .

$$2x - y = 8 \qquad y = 0$$

$$[2x = 8] \div 2 \Rightarrow x = 4$$

نقطة $(4, 0)$

b نقطة التقاطع مع محور الصادات $x = 0$

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي احدى رأساه نقطتا تقاطع المنحني $x^2 + y^2 - 3x = 16$ مع محور الصادات .

$$x^2 + y^2 - 3x = 16 \quad , \quad x = 0$$

$$(0)^2 + y^2 - 3(0) = 16 \Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow \boxed{y \pm 4}$$

$$\boxed{x = 0}$$

$$(0,4) \quad , \quad (0,-4)$$

إستراحة شعرية :

قمرٌ تَكامل في المحاسن وانتهى
فالشمس تشرق من شقائقِ خده
ملكَ الجمالِ باسرهِ فكأنما
حُسنُ البرية كلها من عندهِ



الحالة الأولى:

إذا اعطى معادلة القطع الناقص واطلب معلومات القطع من (بؤرتان – رأسان ... مساحة محيط ... الخ)).

أولاً: يجب ان نضع المعادلة بالشكل القياسي $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ سينات ، $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ صادات

ثانياً: يجب ان يكون معامل x^2 ومعامل y^2 واحد

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

هنا لازم واحد

ثالثاً: إذا كان هناك ثابت (رقم) بعد اليساوي وكان عدد صحيح (ليس كسر) نقسم عليه المعادلة ⟵ تابع المثال التوضيحي $16x^2+9y^2=144$

$$\left[\frac{16x^2}{144}+\frac{9y^2}{144}=\frac{144}{144}\right]\div 144 \Rightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$$

وإذا كان بعد اليساوي كسر نضرب المعادلة في مقلوب الكسر تابع المثال التالي:

$$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=\frac{2}{3} \rightarrow$$ وهو $\frac{3}{2}x$ نضرب

مقلوب الـ $\frac{2}{3}$

$$\frac{x^2}{12}\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{y^2}{3}\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$$

إنتبه!

في حالة وجود عدد (معامل) x^2 أو y^2 يصبح مقام للمقام ⟵ مثلاً

$$\frac{3x^2}{5}+\frac{2y^2}{7}=1$$

ينزل تحت المقام

$$\frac{x^2}{\frac{5}{3}}+\frac{y^2}{\frac{7}{2}}=1$$

مثال 1 جد طول كل من المحورين وإحداثي البؤرتين والرأسين والاختلاف المركزي ومساحة ومحيط القطع الناقص.

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$ ((المعادلة بالشكل القياسي)) لاتحتاج ترتيب

العدد الاكبر هو $25 \leftarrow a^2=25$

العدد الاصغر هو $16 \leftarrow b^2=16$

$a^2=25 \Rightarrow a=5$

$b^2=16 \Rightarrow b=4$

$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}$

$c=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}$

$c=3$

طول المحور الكبير $=2a=2(5)=10$ وحدة

طول المحور الصغير $=2b=2(4)=8$ وحدة

((البؤرتان))
$F_1(c,0) \rightarrow F_1(3,0)$
$F_2(-c,0) \rightarrow F_2(-3,0)$

((الرأسان))
$V_1(a,0) \rightarrow V_1(5,0)$
$V_2(-a,0) \rightarrow V_2(-5,0)$

((أصغر))
$$e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}=0.6<1$$

$A=a.b\pi \Rightarrow A=(5\times4)\pi=20\pi$ وحدة مربعة

$$P=2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}=2\pi\sqrt{\frac{25+16}{2}}$$

$$P=2\pi\sqrt{\frac{41}{2}}$$ وحدة

مثال 2 عين كل من البؤرتين والرأسين والقطبين والمركز ثم جد طول ومعادلة كل من المحورين والاختلاف المركزي القطع $x^2+2y^2=1$

$$\frac{x^2}{1}+\frac{2y^2}{1}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{\frac{1}{2}}=1$$

((سينات)) الأكبر $a^2=1 \Rightarrow a=1$

الأصغر $b^2=\frac{1}{2} \Rightarrow b=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}$

$c=\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}$

$\therefore c=\frac{1}{\sqrt{2}}$

((البؤرتان))
$F_1(c,0) \rightarrow F_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$
$F_2(-c,0) \rightarrow F_2\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},0\right)$

((الرأسان))
$V_1(a,0) \rightarrow V_1(1,0)$
$V_2(-a,0) \rightarrow V_2(-1,0)$

((القطبان))
$M_1(0,b) \rightarrow M_1\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
$M_2(0,-b) \rightarrow M_2\left(0,\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

طول المحور الكبير $=2a=2(1)=2$ وحدة

طول المحور الصغير $=2b=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}$ وحدة

معادلة المحور الكبير $\leftarrow y=0$

معادلة المحور الصغير $\leftarrow x=0$

((أصغر))
$$e=\frac{c}{a}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1}=\frac{1}{\sqrt{2}}<1$$

* المركز $(0,0)$ نقطة الأصل

مثال 3 عين البؤرتان والرأسان والقطبان والمركز ثم جد طول ومعادلة المحورين والاختلاف المركزي للقطع $9x^2+13y^2=117$

$9x^2+13y^2=117 \rightarrow \div 117$ ((ملاحظة ثالثاً))

$$\frac{9x^2}{117}+\frac{13y^2}{117}=\frac{117}{117} \Rightarrow \frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{9}=1$$

(سينات) $a^2=13 \Rightarrow 9=\sqrt{13}$

$b^2=a \Rightarrow b=3$

$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{13-9}$

$c=\sqrt{4} \Rightarrow c=2$

$F_1(c,0) \rightarrow F_1(2,0)$

$F_2(-c,0) \rightarrow F_2(-2,0)$ البؤرتان

$V_1(a,0) \rightarrow V_1(\sqrt{13},0)$

$V_2(-a,0) \rightarrow V_2(-\sqrt{13},0)$ الرأسان

$M_1(0,b) \rightarrow M_1(0,3)$

$M_2(0,-b) \rightarrow M_2(0,-3)$ ((القطبان))

طول المحور الكبير $=2a=2(\sqrt{13})=2\sqrt{13}$ وحدة

طول المحور الصغير $=2b=2(3)=6$ وحدة

معادلة المحور الكبير $y=0$

معادلة المحور الصغير $x=0$

---

* المركز $O(0,0)$ نقطة الأصل

الأختلاف المركزي $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{\sqrt{13}}$

مثال 4 ناقش القطع الناقص $4x^2+3y^2=\frac{4}{3}$

$$4x^2\left(\frac{3}{4}\right)+3y^2\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\frac{3x^2}{1}+\frac{9y^2}{4}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{3}}+\frac{y^2}{\frac{4}{9}}=1$$

(صادات) الأكبر $\frac{4}{9} \rightarrow a^2=\frac{4}{9} \Rightarrow a=\frac{2}{3}$

الأصغر $\frac{1}{3} \rightarrow b^2=\frac{1}{3} \Rightarrow b=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{\frac{4}{9}-\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{4-3}{9}}$

$c=\sqrt{\frac{1}{9}} \Rightarrow c=\frac{1}{3}$

$F_1(0,c) \rightarrow F_1\left(0,\frac{1}{3}\right)$

$F_2(0,-c) \rightarrow F_2\left(0,\frac{-1}{3}\right)$ البؤرتان

$V_1(0,a) \quad V_1\left(0,\frac{2}{3}\right)$

$V_2(0,-a) \quad V_2\left(0,-\frac{2}{3}\right)$ الرأسان

$M_1(0,b) \quad B_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$

$M_2(0,-b) \quad B_2\left(\frac{-1}{\sqrt{3}},0\right)$ ((القطبان))

طول المحور الكبير $=2a=2\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}$ وحدة

طول المحور الصغير $=2b=2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}$ وحدة

معادلة المحور الكبير $\Leftarrow x=0$

معادلة المحور الصغير $\Leftarrow y=0$

$A=a.b\pi=\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\pi=\frac{2}{3\sqrt{3}}\pi$ وحدة مربعة

$P=2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}=2\pi\sqrt{\frac{\frac{4}{9}+\frac{1}{3}}{2}}=2\pi\sqrt{\frac{7}{18}}\pi$ وحدة

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$

أولاً: الأسئلة الاساسية: وهي الأسئلة التي يعطي فيها البؤرة أو الرأس أو القطب مباشرة أو يعطي طول المحور الصغير أو البعد بين البؤرتين . . . الخ .

مثال 1 جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $F_1(3,0)$, $F_2(-3,0)$ ورأساه النقطتان $V_1(5,0)$, $V_2(-5,0)$

(البؤرة) $(c) \rightarrow c=3$ (السينات)

(الرأس) $(a) \rightarrow a=5$ (السينات)

نجد b من القانون العام

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow b=\sqrt{a^2-c^2}$$

$$b=\sqrt{(5)^2-(3)^3}$$

$$b=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}$$

$$b=4$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

مثال 2 جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $(5,0)$, $(-5,0)$ وطول محوره الكبير = 12 وحدة .

(البؤرة) $(c) \rightarrow c=5$ (السينات)

$$[2a=12]\div 2 \Rightarrow a=6$$

نجد b من القانون العام

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow b=\sqrt{a^2-c^2}$$

$$b=\sqrt{(6)^2-(5)^3}$$

$$b=\sqrt{36-25}$$

$$b=\sqrt{11} \Rightarrow b^2=11$$

القطع على محور السينات لأن البؤرة على محو السينات .

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{11}=1$$

مثال 3 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل والمسافة بين البؤرتين (8) وحدات ونصف طول محوره الصغير يساوي (3) وحدات .

المسافة بين البؤرتين $=2c$

$$[2c=8]\div 2$$

$$c=4$$

$$\frac{1}{2}(2b)=3 \Rightarrow b=3$$

($\frac{1}{2}$ ← نصف ، $2b$ ← محوره الصغير)

نجد a من القانون العام

$$a^2=b^2+c^2$$

$$a^2=3^2+4^2$$

$$a^2=9+16 \Rightarrow a^2=25 \Rightarrow a=5$$

لم يحدد موقع البؤرة

السينات:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

أو

الصادات:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$$

4 مثال جد المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه $(0, \mp 2)$ ويتقاطع مع محور السينات عند $x = \mp 4$

البؤرة $(c) \rightarrow c = 2$ (الصادات)

ملاحظة $x = 4$ تُعتبر (b) قطب لأن البؤرة على محور الصادات والذي يعاكس البؤرة هو القطب لذلك $(b = 4)$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = (4)^2 + (2)^2 \Rightarrow a^2 = 16 + 4 \Rightarrow a^2 = 20$$

معادلة الصادات $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{20} = 1$



مثال 5 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل والاختلاف المركزي $\left(\frac{1}{2}\right)$ وطول محوره الصغير (12) وحدة .

طول محوره الصغير $(2b) \Rightarrow [2b = 12] \div 2$

$b = 6$

$e = \frac{c}{a}$

$\frac{1}{2} = \frac{c}{a} \Rightarrow a = 2c$ ....(1)

$a^2 = b^2 + c^2$

$(2c)^2 = (6)^2 + c^2 \Rightarrow 4c^2 = 36 + c^2$

$4c^2 - c^2 = 36$

$[3c^2 = 36] \div 3$

$c^2 = 12 \Rightarrow c = 2\sqrt{3}$

$a = 2c \Rightarrow a = 2(2\sqrt{3})$

$a = 4\sqrt{3} \Rightarrow a^2 = 48$

لم يتم تحديد موقع البؤرة ولها احتمالين :

أولاً : على محور السينات $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{36} = 1$

ثانياً : على محور الصادات $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{48} = 1$

مثال 6 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2 - 12x = 0$ وطول محوره الصغير يساوي (10) وحدات .

طول محوره الصغير $= 2b \Rightarrow [2b = 10] \div 2$

$b = 5$

القطع المكافئ : دائماً نجد P من معادلة القطع المكافئ .

$y^2 - 12x = 0 \Rightarrow y^2 = 12x$

$y^2 = 4Px$

$[4P = 12] \div 4 \Rightarrow P = 3$

$F(3, 0)$

إحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ

$c_{\text{ناقص}} = P_{\text{مكافئ}}$

$c = 3$, $b = 5$, $a = ?$

من القانون العام نجد a

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = (5)^2 + (3)^2$

$a^2 = 25 + 9 \Rightarrow a^2 = 34$

بؤرتا القطع الناقص على محور السينات لأن بؤرة القطع المكافى على السينات .

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{25} = 1$

مثال 7 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $(x^2 = 24y)$ ومجموع طولي محوريه (36) وحدة.

* نستفد من معادلة المكافئ لنجد P

$x^2 = 24y$

$x^2 = 4Py \Rightarrow [4P = 24] \div 4$

$P = 6 \Rightarrow F(0,6)$

إحدى بؤرتيه	هي	بؤرة القطع المكافئ
$c_{\text{ناقص}}$	=	$P_{\text{مكافئ}}$

$\Rightarrow c = 6$

مجموع طولي محوريه $\leftarrow [2a + 2b = 36] \div 2$

$a + b = 18 \Rightarrow b = 18 - a \ldots\ldots\ldots(1)$

$a^2 = b^2 + c^2$

$a^2 = (18 - a)^2 + (6)^2$

مربع حدانية

$\cancel{a^2} = 324 - 36a + \cancel{a^2} + 36 \Rightarrow [36a = 360] \div 36$

$a = 10$

نعوض a في المعادلة (1)

$b = 18 - a$

$b = 18 - 10 \Rightarrow b = 8$

بؤرة الناقص على محور الصادات لذلك القطع على محور الصادات.

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$

مثال 8 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه نقطتا تقاطع المنحني $x^2 + y^2 - 3x = 16$ مع محور الصادات ويمس دليل القطع المكافئ $(y^2 = 12x)$.

نقطة التقاطع مع محور الصادات $x = 0$

$x^2 + y^2 - 3x = 16$

بالجذر $(0)^2 + y^2 - 3(0) = 16 \Rightarrow y^2 = 16$

$y = \mp 4$

(صادات) $F_1(0,4) \quad F_2(0,-4) \rightarrow c = 4$

استفد من معادلة القطع المكافئ لنجد P

$y^2 = 12x$

$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 12] \div 4$

$P = 3$ (سينات)

كلمة يمس يعني أما a أو b

وهنا $\left(P_{\text{مكافئ}} = b_{\text{ناقص}}\right)$ لأن البؤرة صادات والمكافئ سينات والذي يخالف البؤرة هو (b)

$b = 3$

نجد a من القانون العام

$a^2 = b^2 + c^2$

$a^2 = 3^2 + 4^2$

$a^2 = 9 + 16 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

مثال 9 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور السينات والمسافة بينهما (6) وحدات والفرق بين طولي محوريه (2).

$[2c = 6] \div \Rightarrow c = 3$

$[2a - 2b = 2] \div 2 \Rightarrow a - b = 1$

$a = 1 + b \ldots\ldots(1)$

$a^2 = b^2 + c^2$

$(1+b)^2 = b^2 + 3^2$

$1 + 2b + \cancel{b^2} = \cancel{b^2} + 9 \Rightarrow 2b = 9 - 1$

$[2b = 8] \div 2$

$b = 4$ ((تعوض في معادلة رقم (1))

$a = 1 + b$

$a = 1 + 4 \Rightarrow a = 5$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

مثال 10 جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الأصل وطول محوره الكبير ضعف طول محوره الصغير ويقطع القطع المكافئ $(y^2 + 8x = 0)$ عند النقطة التي احداثيها السيني (2−).

$[2a = 2(2b)] \div 2$

ضعف محوره الصغير = محوره الكبير

$a = 2b \ldots\ldots(1)$

يقطع القطع عند النقطة $x = -2$ نُعوضه قيمة x في معادلة القطع المكافئ

بالجذر $y^2 + 8(-2) = 0 \Rightarrow y^2 = 16$

$y = \pm 4$

$(-2, 4)$, $(-2, -4)$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

نعوض إحدى النقطتين ولتكن $(-2, 4)$

$$\frac{(-2)^2}{a^2} + \frac{(4)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{4}{(2b)^2} + \frac{16}{b^2} = 1$$

ونعوض أيضاً $a = 2b$

$$\frac{\cancel{4}}{\cancel{4}b^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{16}{b^2} = 1$$

$$\frac{17}{b^2} = \frac{1}{1}$$

$b^2 = 17 \Rightarrow b = \sqrt{17}$

$a = 2b \Rightarrow a = 2\sqrt{17} \Rightarrow a^2 = 68$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{68} + \frac{y^2}{17}$$

ملاحظة ومثال إذا أعطى في السؤال نقطة (x,y) شرط لا تحوي احداثي صفر نستفيد من معادلة القطع القياسية $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ أو $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

لنعوض النقطة (x,y) ونكون معادلة.

مثال 11 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2+8x=0$ علماً ان القطع الناقص يمر بالنقطة $(\sqrt{3}\ ,\ 2\sqrt{3})$.

* نستفد من معادلة المكافئ لنجد P

$y^2=-8x$

$y^2=-4Px \Rightarrow [4P=8]\div 4 \Rightarrow P=2$

$F(-2,0)$

إحدى بؤرتيه	هي	بؤرة القطع المكافئ
$c_{ناقص}$	$=$	$P_{مكافئ}$

$c=2$

أنظر الى النقطة $(2\sqrt{3},\sqrt{3})$ نستفيد من معادلة القطع الناقص القياسية.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{(2\sqrt{3})^2}{a^2}+\frac{(\sqrt{3})^2}{b^2}=1$

$\left[\frac{12}{a^2}+\frac{3}{b^2}=1\right].a^2\ .b^2$

$12b^2+3a^2=a^2\ .b^2$ ....(1)

$a^2=b^2+c^2$

$a^2=b^2+2^2 \Rightarrow a^2=b^2+4$ ....(2)

بتعويض معادلة (2) في معادلة (1)

$12b^2+3\underbrace{(b^2+4)}_{a^2}=\underbrace{(b^2+4)}_{a^2}.b^2$

$\underbrace{12b^2+3b^2}_{جمع}+12=b^4+4b^2$

$15b^2+12=b^4+4b^2$

$0=b^4+\underbrace{4b^2-15b^2}_{طرح}-12$

$b^4-11b^2-12=0$

$(b^2+1)(b^2-12)=0$

أما $b^2+1=0$ يُهمل $\notin R$

أو $b^2-12=0 \Rightarrow b^2=12$

نعوض في معادلة (2)

$a^2=b^2+4$ ....(2)

$a^2=12+4 \Rightarrow a^2=16$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$

ملاحظة ومثال إذا طلب في السؤال معادلة القطع الناقص وأعطى نقطتين $P_1(x,y)$ ، $P_2(x,y)$ نستفيد مباشرة من المعادلة القياسية .

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ أو $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ حسب موقع البؤرة ونعوض النقطتين مرتين .

مثال 12 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور السينات ويمر بالنقطتين $(3,4)$, $(6,2)$.

(البؤرة على محور السينات)

(x,y)
$(3,4)$

$$\frac{(3)^2}{a^2}+\frac{(4)^2}{b^2}=1$$

$$\left[\frac{9}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1\right].a^2\ .b^2$$

$$9b^2+16a^2=a^2b^2 \ ....(1)$$

ونعوض $(6,2)$
(x,y)

$$\frac{(6)^2}{a^2}+\frac{(2)^2}{b^2}=1$$

$$\left[\frac{36}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1\right].a^2\ .b^2$$

$$36b^2+4a^2=a^2\ .b^2 \ ....(2)$$

نضرب المعادلة (1) في 4 لنساوي معامل b^2 ونحل بالحذف (الطرح)

$$36b^2+64a^2=4a^2b^2 \ ....(3)$$

نجد (2) أو (3)

$$36b^2+64a^2=4a^2b^2$$

$$\pm36b^2\pm4a^2=\pm a^2b^2$$

$$\left[60a^2=3a^2b^2\right]\div a^2 \qquad a^2\neq0$$

$$\left[60=3b^2\right]\div3 \Rightarrow b^2=20$$

نعوض في معادلة (1)

$$9b^2+16a^2=a^2b^2$$

$$9(20)+16a^2=a^2(20)$$

$$180+16a^2=20a^2$$

$$180=20a^2-16a^2 \Rightarrow \left[180=4a^2\right]\div4$$

$$a^2=45$$

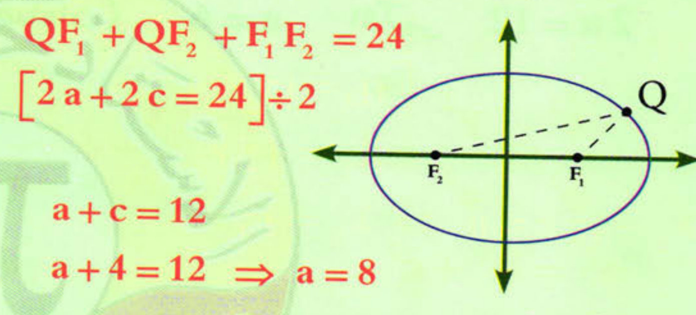
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$$

ملاحظة ومثال إذا أعطى المحيط بين النقاط $QF_1\ F_2$ أي المحيط للمثلث المتكون من البؤرتين $F_1\ ,F_2$ ونقطة ثالثة على القطع يكون الحل كما يلي :

$$\text{محيط المثلث}\ QF_1F_2 = \underbrace{QF_1 + F_2}_{2a} + \underbrace{F_1F_2}_{2c} \Rightarrow 2a+2c = (\text{المحيط})$$

ونكّون معادلة رقم (1) ونكمل الحل ⟵ تابع المثال التالي :

مثال 13 جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتيه $F_1(4,0)\ ,\ F_2(-4,0)$ والنقطة تنتمي للقطع الناقص Q بحيث ان محيط المثلث QF_1F_2 يساوي (24) وحدة .

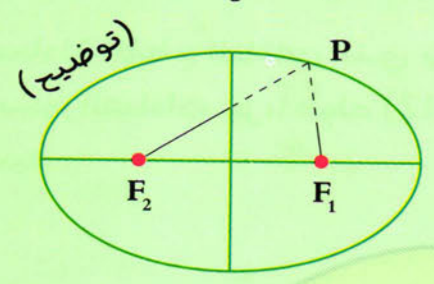


$$QF_1 + QF_2 + F_1F_2 = 24$$
$$[2a+2c=24] \div 2$$
$$a+c=12$$
$$a+4=12 \Rightarrow a=8$$

نجد b من القانون العام

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$$
$$b = \sqrt{64-16}$$
$$b = \sqrt{48} \Rightarrow b^2 = \sqrt{48}$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1}$$

مثال 14 قطع ناقص فيه النقطة P تنتمي للقطع بحيث ان محيط المثلث PF_1F_2 يساوي (16) وحدة جد معادلة القطع الناقص إذا علمت أن طول محوره الصغير يساوي البعد بين بؤرته ودليل القطع المكافئ $y^2 = 16x$ علمت ان القطع على محور السينات (إضافي) .



$$PF_1 + PF_2 + F_1F_2 = 16$$
$$[2a+2c=16] \div 2$$
$$a+c=8 \Rightarrow c=8-a \ ....(1)$$
$$y^2 = 16x$$
$$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P=16] \div 4 \Rightarrow P=4$$

$$2b = 2P$$

طول المحور الصغير ↲ ↳ البعد بين بؤرة ودليل القطع المكافئ

$$b = P \Rightarrow \boxed{b=4}$$ للناقص

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$a^2 = (4)^2 + (8-a)^2$$
$$\cancel{a^2} = 16 + 64 - 16a + \cancel{a^2}$$
$$[16a = 80] \div 16 \Rightarrow a=5$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1}$$

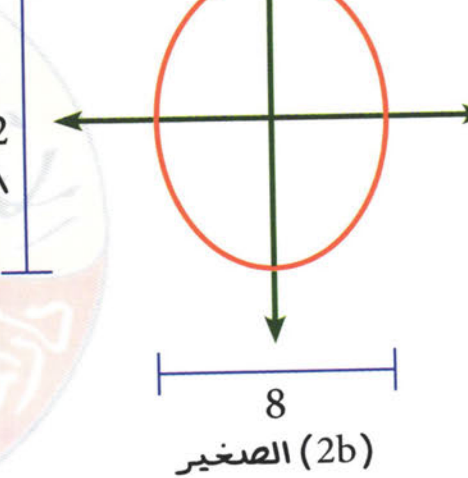
ملاحظة ومثال إذا قال في السؤال ان القطع الناقص يقطع من محور (جزءاً) طوله (   )
فأن هذا الجزء المقطوع أما $2a$ أو $2b$ تابع المثال التالي :

$2a$ ← الجزء الأكبر
$2b$ ← الجزء الأصغر
والقطع يقع على المحور الأكبر

مثال 15 جد معادلة القطع الناقص الذي يقطع من محور السينات جزءاً طوله (8) وحدات ومن محور الصادات جزءاً طوله (12) وحدة . ثم جد المسافة بين البؤرتين والمساحة والمحيط .

$2b = 8$ الأصغر $b = 4$

$2a = 12$ الأكبر $a = 6$ (صادات)



$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20} = \sqrt{5 \times 4} \Rightarrow c = 2\sqrt{5}$$

المسافة بين البؤرتين $2 \times 2\sqrt{5} = 2c$

$= 4\sqrt{5}$ وحدة طول

$$A = a \cdot b\pi$$

$$A = (6)(4)\pi \Rightarrow A = 24\pi \ unit^2$$

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{36+16}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{52}{2}} = 2\pi\sqrt{26} \ unit$$



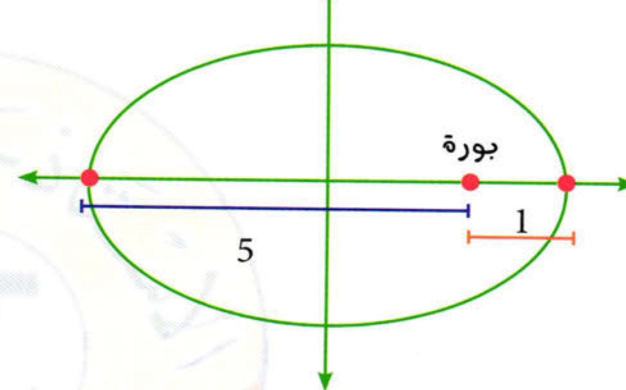
ملاحظة ومثال عندما يعطي في السؤال بعدي احدى البؤرتين عن الرأسين بشكل عددين فأن الحل يكون :

من القانون العام نجد (b) ثم معادلة القطع الناقص

مجموع البعدين $= 2a$
حاصل طرح البعدين $= 2c$



مثال 16 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه تبعد عن نهايتي محوره الكبير بالعددين $1,5$ على الترتيب .



((الرسم افتراضي))
من الممكن رسمه على محور الصادات

مجموع البعدين

$$2a = 5+1 \Rightarrow [2a = 6] \div 2$$

$$a = 3$$

حاصل طرح البعدين

$$2c = 5-1 \Rightarrow [2c = 4] \div 2$$

$$c = 2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$b = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5} \Rightarrow b^2 = 5$$

لم يحدد موقع البؤرة لذلك ناخذ احتمالين

السينات

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$$

الصادات

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$$



ملاحظة ربما يتسائل الطالب الملاحظة تقول ((إذا أعطى بعدي إحدى البؤرتين عن الرأسين)) والسؤال أعطى بعد إحدى البؤرتين عن نهايتي محوره الكبير!

لذلك:
((نفس المعنى كلا التعبيرين))

ملاحظة ومثال

إذا أعطى ي السؤال معادلة قطع تحتوي على ثابت مجهول $h, k \in R$ مثلاً:

أولاً: إذا كانت المعادلة تحتوي مجهول واحد فقط نستفاد من معادلة القطع لنجد a^2 او b^2 ونستخدم القانون العام $a^2 = b^2 + c^2$ ← تابع الأمثلة الآتية:

مثال 17 لتكن $kx^2 + 4y^2 = 36$ معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه $(\sqrt{3}, 0)$ جد قيمة $k \in R$.

$$\left[kx^2 + 4y^2 = 36\right] \div 36$$

$$\frac{kx^2}{36} + \frac{4y^2}{36} = \frac{36}{36} \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{36}{k}} + \frac{y^2}{9} = 1$$

لأن البؤرة على محور السينات

إذن $\frac{36}{k} = a^2$ ← $b^2 = 9$, $c = \sqrt{3}$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$\frac{36}{k} = 9 + (\sqrt{3})^2$$

$$\frac{36}{k} = 9 + 3 \Rightarrow \frac{36}{k} = 12 \Rightarrow k = \frac{36}{12} \Rightarrow \boxed{k = 3}$$

مثال 18 قطع ناقص معادلته $4x^2 + hy^2 - h = 0$ إحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2 = 4\sqrt{3}x$ جد قيمة $h \in R$ ((سؤال إضافي)).

من معادلة القطع المكافئ نجد P

$$y^2 = 4\sqrt{3}x$$

$$y^2 = 4Px \Rightarrow \left[4P = 4\sqrt{3}\right] \div 4 \Rightarrow P = \sqrt{3}$$

$$F(\sqrt{3}, 0)$$

((للناقص)) $\therefore c = \sqrt{3}$

$$\left[4x^2 + hy^2 = h\right] \div h$$

$$\frac{x^2}{\frac{h}{4}} + \frac{y^2}{1} = 1$$

القطع على محور السينات من بؤرة القطع المكافئ $(\sqrt{3}, 0)$ لذلك

$$\frac{h}{4} = a^2 \quad , \quad 1 = b^2 \quad , \quad c = \sqrt{3}$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$\frac{h}{4} = 1 + (\sqrt{3})^2$$

$$\frac{h}{4} = 1 + 3 \Rightarrow \frac{h}{4} = \frac{4}{1}$$

$$\boxed{h = 16}$$

ثانياً: إذا كانت المعادلة تحتوي مجهولين فلا نستفيد منها بشيء فقط نجعلها بالشكل القياسي بعد اتمام السؤال وبالمقارنة مع المعادلة التي سوف نستخرجها نجد المجاهيل ← تابع المثال التالي:

مثال 19 قطع ناقص معادلته $hx^2 + ky^2 = 36$ مركزه نقطة الأصل ومجموع مربعي طولي محوريه يساوي (60) وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = 4\sqrt{3}x$ جد قيمة $h, k \in R$.

لأن معادلة القطع الناقص تحتوي مجهولين لا نستفاد منها لذلك من معلومات السؤال نجد معادلة القطع الناقص.

$y^2 = 4\sqrt{3}x$

$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 4\sqrt{3}] \div 4 \Rightarrow P = \sqrt{3}$

$F(\sqrt{3}, 0)$

$P = c \Rightarrow c = \sqrt{3}$ (P مكافئ، c ناقص)

$(2a)^2 + (2b)^2 = 60$ (مربعي، مجموع، طولي محوريه)

$[4a^2 + 4b^2 = 60] \div 4$

$a^2 + b^2 = 15 \Rightarrow \boxed{a^2\ 15 - b^2}$ ....(1)

تعويض

$a^2 = b^2 + c^2$

$15 - b^2 = b^2 + (\sqrt{3})^2$

$15 - b^2 = b^2 + 3$

$15 - 3 = b^2 + b^2 \Rightarrow [12 = 2b^2] \div 2$

$b^2 = 6$ نعوض في معادلة (1)

$a^2 = 15 - b^2$

$a^2 = 15 - 6 \Rightarrow a^2 = 9$

الأن نجد معادلة القطع الناقص

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1$$

بعد ذلك نجعل معادلة المجاهيل بالشكل القياسي ثم نقارنها

$$\left[\frac{hx^2}{36} + \frac{ky^2}{36} = \frac{36}{36}\right] \div 36$$

$$\frac{x^2}{\frac{36}{h}} + \frac{y^2}{\frac{36}{h}} = 1 \xrightarrow{\text{بالمقارنة}} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1$$

$$\frac{36}{h} = 9 \Rightarrow h = \frac{36}{9} \Rightarrow \boxed{h = 4}$$

$$\frac{36}{k} = 6 \Rightarrow k = \frac{36}{6} \Rightarrow \boxed{k = 6}$$




مثال 20 باستخدام التعريف جد معادلة القطع الناقص اذا علم :

a- بؤرتاه النقطتان $(0 , \pm 2)$ ورأساه $(0 , \pm 3)$ ومركزه نقطة الأصل .

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

القانون $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = 2a$

التعويض $\sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x+0)^2 + (y+2)^2} = 6$

التحويل (تحويل الجذر للطرف الاخر)

وبتربيع الطرفين $\sqrt{x^2 + y^2 - 4y + 4} = 6 - \sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4}$

فتح التربيع داخل الجذر اعلاه — فتح التربيع داخل الجذر اعلاه

$$x^2 + y^2 - 4y + 4 = 36 - 12\sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4} + x^2 + y^2 + 4y + 4$$

$$\left[12\sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4} = 36 + 8y\right] \div 4$$

وبتربيع الطرفين $3\sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4} = 9 + 2y$

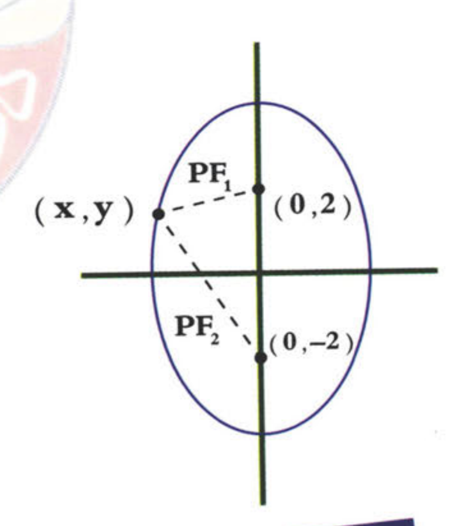
$$9(x^2 + y^2 + 4y + 4) = 81 + 36y + 4y^2$$

$$9x^2 + 9y^2 + 36y + 36 = 81 + 36y + 4y^2$$

$$9x^2 + 9y^2 - 4y^2 = 81 - 36$$

$$\left[9x^2 + 5y^2 = 45\right] \div 45$$

معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$



توضيح

$a = 3 \Rightarrow 2a = 6$

$P(x , y)$ (x_2 y_2) $\xrightarrow{PF_1}$ $F_1\ (0 , 2)$ (x_1 y_1)

$P(x , y)$ $\xrightarrow{PF_2}$ $F_2\ (0 , -2)$ (x_1 y_1)





b- باستخدام التعريف جد معادلة القطع الناقص اذا علمت ان المسافة بين بؤرتيه 6 وحدات والعدد الثابت =10 والبؤرتان تقعان على محور السينات .:

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

القانون $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} + \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = 2a$

التعويض $\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2} + \sqrt{(x+3)^2+(y-0)^2} = 10$

التحويل (تحويل الجذر للطرف الاخر)

وبتربيع الطرفين $\sqrt{x^2-6x+9+y^2} = 10 - \sqrt{x^2+6x+9+y^2}$

فتح التربيع داخل الجذر اعلاه — فتح التربيع داخل الجذر اعلاه

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 = 100 - 20\sqrt{x^2+6x+9+y^2} + x^2 + 6x + 9 + y^2$$

وبتربيع الطرفين $\left[20\sqrt{x^2+6x+9+y^2} = 100 + 12x\right] \div 4$

$$5\sqrt{x^2+6x+9+y^2} = 25 + 3x$$

$$25(x^2+6x+9+y^2) = 625 + 150x + 9x^2$$

$$25x^2 + 150x + 225 + 25y^2 = 625 + 150x + 9x^2$$

$$25x^2 + 25y^2 - 9x^2 = 625 - 225$$

$$\left[16x^2 + 25y^2 = 400\right] \div 400$$

معادلة القطع الناقص $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

توضيح

$2c = 6 \Rightarrow c = 3$

العدد الثابت $2a = 10$

$P(x, y)$ (x_2 y_2) → $F_1(3, 0)$ (x_1 y_1)

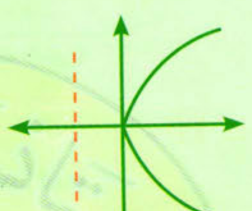
$P(x, y)$ → $F_2(-3, 0)$ (x_1 y_1)

الاسئلة الوزارية الخاصة بالقطع الناقص والربط بين القطعين المكافئ والناقص

سؤال 1 النقطة $\left(\frac{1}{3},2\right)$ تنتمي الى القطع المكافئ الذي راسه نقطة الاصل وبؤرته تنتمي الى محور السينات والتي هي احدى بؤرتي القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل والنسبة بين طولي محوريه $\left(\frac{5}{4}\right)$ جد معادلة القطعين المكافئ والناقص .

1995 - د (2)

القطع المكافئ :



الفتحة نحو اليمين لأن النقطة في الربع الأول والبؤرة على محور السينات .

$$y^2 = 4Px$$

$$(2)^2 = 4P\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow 4 = \frac{4P}{3} \Rightarrow P = 3$$

$$y^2 = 4(3)x \Rightarrow \boxed{y^2 = 12x}$$

القطع الناقص:

$$P_{\text{مكافئ}} = C_{\text{ناقص}}$$

$$\frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}b} = \frac{5}{4} \Rightarrow [4a = 5b] \div 4$$

$$a = \frac{5}{4}b \,......(1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$\left(\frac{5}{4}b\right)^2 = b^2 + (3)^3$$

$$\left[\frac{25}{16}b^2 = b^2 + 9\right].\ 16$$

$$25b^2 = 16b^2 + 144$$

$$25b^2 - 16b^2 = 144$$

$$[9b^2 = 144] \div 9 \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$$

$a = \frac{5}{4}b$ نعوض في معادلة (1)

$$a = \frac{5}{\cancel{4}}(\cancel{4}) \Rightarrow a = 5$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1}$$

سؤال 2 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور السينات والمسافة بين بؤرتيه تساوي (8) وحدات ومجموع طولي محوريه يساوي (16) وحدة .

2002 - د (1)

$[2c = 8] \div 2 \Rightarrow c = 4$ ((سينات))

$$[2a + 2b = 16] \div 2 \Rightarrow a + b = 8$$

$$a = 8 - b \,......(1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$(8-b)^2 = b^2 + (4)^2$$

$$64 - 16b + \cancel{b^2} = \cancel{b^2} + 16$$

$$16b = 64 - 16$$

$[16b = 48] \div 16 \Rightarrow b = 3$

$a = 8 - b \Rightarrow a = 8 - 3$

$a = 5$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

سؤال 3 قطع ناقص معادلته $x^2 + 4y^2 = 4$ جد طول محوريه واحداثي راسيه وبؤريته.

2003 - د (1)

$[x^2 + 4y^2 = 4] \div 4 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$

$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$

$b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$c = \sqrt{4-1} \Rightarrow c = \sqrt{3}$

طول المحور الكبير $(2a) = 2 \times 2 = 4$ وحدة

طول المحور الصغير $(2b) = 2 \times 1 = 2$ وحدة

الراسان $V_1(a, 0)$, $V_2(-a, 0)$

$V_1(2, 0)$, $V_2(-2, 0)$

البؤرتان $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$

$F_1(\sqrt{3}, 0)$, $F_2(-\sqrt{3}, 0)$

سؤال 4 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $x^2 = 24y$ والفرق بين طولي محوريه ليساوي (4) وحدات.



2015 - د (2) خارج القطر

نستفيد من معادلة القطع المكافئ لنجد P

$x^2 = 24y$

$x^2 = 4Py \Rightarrow [4P = 24] \div 4$

$P = 6 \Rightarrow F(0, 6)$

بؤرة المكافئ إحدى بؤرتي الناقص اي ان على محور الصادات $c = 6$

الفرق بين طولي محوريه $2a - 2b = 4$

$a - b = 2 \Rightarrow a = 2 + b$ ....(1)

$a^2 = b^2 + c^2$

$(2 + b)^2 = b^2 + (6)^2$

$4 + 4b + \cancel{b^2} = \cancel{b^2} + 36$

$4b = 36 - 4 \Rightarrow [4b = 32] \div 4$

$b = 8$ تعويض

$a = 2 + b$

$a = 2 + 8 \Rightarrow a = 10$

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$

سؤال 5 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور السينات والمسافة بين بؤرتيه تساوي (12) وحدة والفرق بين طولي محوريه يساوي (4) وحدات طول.

2006 تمهيدي

$[2c = 12] \div 2 \Rightarrow c = 6$

$[2a - 2b = 4] \div 2$

$a - b = 2 \Rightarrow a = 2 + b$ ....(1)

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$(2+b)^2 = b^2 + (6)^2$$

$$4 + 4b + \cancel{b^2} = \cancel{b^2} + 36$$

$$4b = 36 - 4 \Rightarrow [4b = 32] \div 4$$

$$b = 8$$

تعويض

$$a = 2 + b$$

$$a = 2 + 8 \Rightarrow a = 10$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1}$$

سؤال 6 لتكن $y^2 + 12x = 0$, $y^2 - 12x = 0$ معادلتي قطعين مكافئين جد بؤرة كل منهما ومعادلة دليله ثم جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطعين المكافئين وطول محوره الصغير يساوي (10) وحدات طول .

2005 - د (2)

القطع المكافئ :

$$y^2 - 12x = 0$$

$$y^2 = 12x$$

$$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 12] \div 4 \Rightarrow P = 3$$

البؤرة $F(3, 0)$

معادلة الدليل $x = -3$

$$y^2 + 12x = 0$$

$$y^2 = -12x$$

$$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 12] \div 4 \Rightarrow P = 3$$

البؤرة $F(-3, 0)$

معادلة الدليل $x = +3$

القطع الناقص: $\underset{\text{مكافئ}}{P} = \underset{\text{مكافئ}}{c}$

بؤرتاه هما $F_1(3, 0)$, $F_2(-3, 0)$

$$\therefore \quad c = 3$$

$$[2b = 10] \div 2 \Rightarrow b = 5$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = 5^2 + 3^2 \Rightarrow a^2 = 25 + 9$$

$$a^2 = 34$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{25} = 1}$$



سؤال 7 جد معادلة القطع الناقص الناقص الذي إحدى بؤرتيه هي بؤرته القطع المكافئ $y^2 = -8x$ وطول محوره الكبير ثلاث امثال طول محوره الصغير .

2010 تمهيدي

$$y^2 = -8x$$

$$y^2 = -4Px \Rightarrow [4P = 8] \div 4 \Rightarrow P = 2$$

$F(-2, 0)$ ((سينات))

$$[2a = 3(2b)] \div 2$$

$$a = 3b \ldots\ldots (1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$(3b)^2 = b^2 + 4 \Rightarrow 9b^2 = b^2 + 4$$

$$9b^2 - b^2 = 4 \Rightarrow [8b^2 = 4] \div 8$$

$$b^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$a = 3b \Rightarrow a = a\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$a = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow a^2 = \frac{9}{2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{\frac{9}{2}} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1}$$

سؤال 8 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ومحوره على المحورين الاجداثيين ويمر من بؤرة القطع المكافئ $y^2 - 16x = 0$ ومساحة منطقة القطع الناقص 20π وحدة مساحة.

2010 - د (1)

$y^2 = 16x$

$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 16] \div 4 \Rightarrow P = 4$

البؤرة $F(4,0)$

القطع الناقص:

يمر من بؤرة المكافئ $F(4,0)$ أما $a = 4$ أو $b = 4$

$A = ab\pi$

$20\not{\pi} = a.b\not{\pi} \Rightarrow 20 = a.b \quad .....(1)$

يوجد لدينا احتمالين:

الأول: $a = 4$ نعوض بمعادلة (1)

$[20 = 4b] \div 4 \Rightarrow b = 5$

هذا الاحتمال يُهمل لأن فيه a اصغر من b وهذا لايمكن في القطع الناقص.

الثاني: $b = 4$

$[20 = 4a] \div 4 \Rightarrow a = 5$

هذا الاحتمال صح لأن a أكبر من b.

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1}$$

ملاحظة

القطع على محور الصادات لأن البؤرة $F(4,0)$ التي مر بها القطع اصبحت b أي انها قطب وبما ان القطب سيني فالقطع صادي لأن البؤرة عكس القطب.

سؤال 9 قطع ناقص راساه $(\pm5,0)$ وإحدى بؤرتيه هي بؤره القطع المكافئ الذي راسه نقطة الأصل والمار دليله بالنقطة $(-3,4)$ جد معادلة القطعين المكافئ والناقص.

2012 خارج القطر

القطع المكافئ:



القطعان على محور السينات.

$y^2 = 4Px \qquad P = 3$

$y^2 = 4(3)x \Rightarrow y^2 = 12x$ معادلة القطع المكافئ

القطع الناقص:

بؤرتة القطع المكافئ والتي هي $F(3,0) \rightarrow$ إحدى بؤرتي الناقص رأساه $(\pm5,0)$

$c = 3 \qquad a = 5 \qquad b = ?$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$

$b = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16}$

$b = 4$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

سؤال 10 جد معادلة القطع الناقص الذي تقع بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الأصل والنسبة بين طولي محوريه 2 : 1 ويقطع القطع المكافئ $y^2 = 8x$ عند $x = 2$

2013 خارج القطر

$y^2 = 8x$

$y^2 = 8(2) \Rightarrow y^2 = 16$ بالجذر

$y = \mp 4 \quad (2,4) \; , \; (2,-4)$

$\frac{2b}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2b \ldots\ldots(1)$

لأن لدينا (x,y) نستفيد من معادلة القطع الناقص القياسية.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ نعوض $(2,4)$

$\frac{(2)^2}{(2b)^2} + \frac{(4)^2}{b^2} = 1$

$\frac{4}{4b^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{16}{b^2} = 1$

$\frac{17}{b^2} = \frac{1}{1} \Rightarrow b^2 = 17$

$b = \sqrt{17} \Rightarrow a = 2b$

$a = 2\sqrt{17} \Rightarrow a^2 = 68$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{68} + \frac{y^2}{17} = 1}$

سؤال 11 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين ويقطع من محور السينات جزءاً طوله (8) وحدات ومساحة منطقته 24π وحدة مساحة.

2012 - د (2)

الجزء المقطوع من محور السينات

أما $2a = 8 \Rightarrow a = 4$

أو $2b = 8 \Rightarrow b = 4$

$A = a \cdot b\pi$

$24\pi = a \cdot b\pi \Rightarrow a \cdot b = 24$

نعوض أولاً $a = 4$

$[4b = 24] \div 4 \Rightarrow b = 6$ يُهمل

لأن $b < a$ أصغر

ثم نعوض $b = 4$

$[4a = 24] \div 4 \Rightarrow a = 6 \quad o.k$

$a > b$ أكبر

$a = 6 \; , \; b = 4$

القطع على محور الصادات لأن الجزء المقطوع منه محور السينات اصبح يمثل (2b) أي محور القطب.

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1}$

سؤال 12 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2 - 12x = 0$ وطول محوره الصغير يساوي (8) وحدات .

2014 تمهيدي

$[2b = 8] \div 2 \Rightarrow b = 4$

$y^2 = 12x$

$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 12] \div 4$

$P = 3 \rightarrow F(3,0)$

إحدى بؤرتيه	هي	بؤرة القطع المكافئ
$c_{ناقص}$	=	$P_{مكافئ}$

$c = 3$

$a^2 = b^2 + c^2$

$a^2 = (4)^2 + (3)^2 \Rightarrow a^2 = 16 + 9$

$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1}$

سؤال 13 جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتمي لمحور الصادات ومساحته (32π) وحدة مساحة والنسبة بين طولي محوريه كنسبة $\frac{1}{2}$.

2015 - د (2)

$\frac{\not 2 b}{\not 2 a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2b$ ....(1)

نعوض معادلة (1) هنا $A = a.b\pi$

$32\not\pi = a.b\not\pi$

$32 = (2b)(b) \Rightarrow [2b^2 = 32] \div 2$

$b^2 = 16$ بالجذر

$b = 4$ نعوض معادلة (1)

$a = 2(b) = 2(4) \Rightarrow a = 8$

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{64} = 1}$

سؤال 13 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $x^2 - 16y = 0$ وطول محوره الكبير = 12 وحدة .

2016 تمهيدي

$x^2 - 16y = 0 \Rightarrow x^2 = 16y$

$x^2 = 4Py$

$[4P = 16] \div 4 \Rightarrow P = 4 \quad F(0,4)$

$c = 4$ للناقص

$[2a = 12] \div 2 \Rightarrow a = 6$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$

$b = \sqrt{6^2 - 4^2}$

$b = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20}$

$b^2 = 20$

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{36} = 1}$

سؤال 15 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبعده البؤري مساوياً لبعد بؤرة القطع المكافئ $y^2 + 24x = 0$ عن دليله إذا علمت ان مساحة القطع الناقص تساوي $80\pi cm^2$.

2016 - د (1)

$y^2 = -24x$

$y^2 = -4Px \Rightarrow [4P = 24] \div 4$

$P = 6$

البعد بين بؤرة القطع المكافئ ودليله = 2P

$2c = 2P$

بعده البؤري ↓ مساوياً لبعد بؤرة القطع المكافئ عن دليله

$\therefore c = P \Rightarrow \boxed{c = 6}$ (للناقص)

$A = a.b\pi$

$80\pi = a.b\pi \Rightarrow b = \frac{80}{a}$ ....(1)

$a^2 = b^2 + c^2$

$a^2 = \left(\frac{80}{a}\right)^2 + (6)^2$

$\left[a^2 = \frac{6400}{a^2} + 36\right].a^2$

$a^4 = 6400 + 36a^2$

$a^4 - 36a^2 - 6400 = 0$

$(a^2 + 64)(a^2 - 100) = 0$

أما $a^2 + 64 = 0$ $\notin R$

أو $a^2 - 100 = 0 \Rightarrow a^2 = 100 \Rightarrow a = 10$

$b = \frac{80}{a} = \frac{80}{10} \Rightarrow b = 8$

لم يحدد بؤرة القطع

إنتبه ! على الرغم ان القطع المكافئ على محور السينات إلا ان لم يحدد موقع البؤرة وانما اطوال فقط .

فقال $2c = 2P$ وهذا لا يعني انهما يقعان على نفس المحور .

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$

سؤال 16 إذا كان $e + id = \frac{4+2i}{1-i}$ جد معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه $(0, d)$ وطول محوره الكبير يساوي $2\|e + di\|$

2014 نازحين

2016 نازحين

$e + id = \frac{4+2i}{1-i} . \frac{1+i}{1+i}$

$e + id = \frac{4+4i+2i-2}{(1)^1 + (1)^2} = \frac{2+6i}{2}$

$$e+di=1+3i \Rightarrow e=1$$

$$d=3$$

إحدى بؤرتي القطع الناقص $(0,d)=(0,3)$

$$r=\|e+di\|=\sqrt{e^2+d^2}$$

$$=\sqrt{(1)^2+(3)^2}=\sqrt{10}$$

$$2a=2\sqrt{10} \Rightarrow a=\sqrt{10} \Rightarrow a^2=10$$

$$c=3 \;,\; a=\sqrt{10} \;,\; b=?$$

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow b=\sqrt{a^2-c^2}$$

$$b=\sqrt{10-9}=\sqrt{1}$$

$$b=1$$

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{10}=1}$$

سؤال 17 قطع ناقص معادلته $4x^2+2y^2=k$ والبعد بين بؤرتيه $2\sqrt{3}$ وحدة طول جد قيمه k.

2008 - د (1)

$$\left[4x^2+2y^2=k\right]\div k$$

$$\frac{4x^2}{k}+\frac{2y^2}{k}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{k}{4}}+\frac{y^2}{\frac{k}{2}}=1$$

$$\left[2c=2\sqrt{3}\right]\div 2 \Rightarrow \boxed{c=\sqrt{3}}$$

$\frac{k}{2}$ أكبر من $\frac{k}{4}$ ((كلما صغر المقام كبر الكسر))

((القطع صادي)) لأن الكبير $\frac{k}{2}$ يقع على محور (y)

$$a^2=\frac{k}{2},\; b^2=\frac{k}{4},\; c=\sqrt{3}$$

$$a^2=b^2+c^2$$

$$\frac{k}{2}=\frac{k}{4}+\left(\sqrt{3}\right)^2$$

$$\left[\frac{k}{2}=\frac{k}{4}+3\right].4$$

$$2k=k+12$$

$$2k-k=12 \Rightarrow \boxed{k=12}$$



سؤال 18 إذا كان $ky^2 + 3x^2 = z$ معادلة قطع ناقص بؤرتاه تنتميان الى محور السينات ويمر بنقطة تقاطع المستقيم $8x + y = \sqrt{3}$ مع المحور الصادي علماً ان مساحة القطع $2\sqrt{3}\pi$ وحدة مساحة جد $k, Z \in R$.

2010 - د (2)

((نقطة التقاطع مع محور الصادات)) $x = 0$ $\quad 2x + y = \sqrt{3}$

$2(0) + y = \sqrt{3}$

هذه النقطة تمثل القطب لانها على محور y $\rightarrow$ $(0, \sqrt{3})$ $\quad y = \sqrt{3}$

والبؤرة على محور X اي ان $b = \sqrt{3}$

$$A = a\,.\,b\pi \Rightarrow 2\sqrt{3}\pi = a(\sqrt{3})\pi \Rightarrow a = 2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

$$\left[ky^2 + 3x^2 = Z\right] \div Z \Rightarrow \frac{3x^2}{Z} + \frac{ky^2}{Z} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{Z}{3}} + \frac{y^2}{\frac{Z}{k}}$$

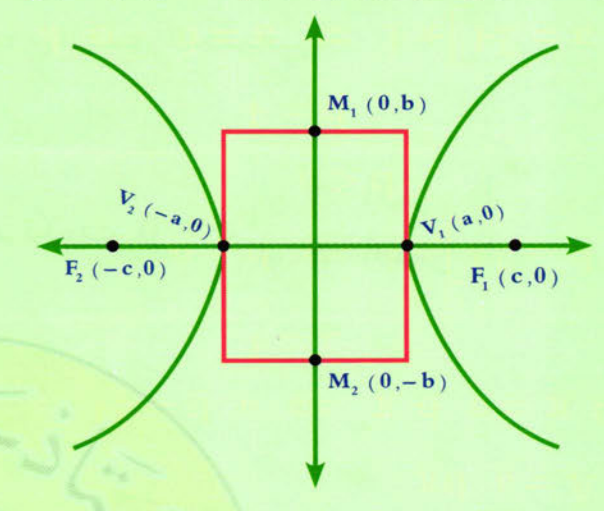
$a^2 = \frac{Z}{3}$, $\frac{Z}{k} = b^2$

$$\frac{Z}{3} = a^2 \Rightarrow \frac{Z}{3} = 4 \Rightarrow \boxed{Z = 12}$$

$$\frac{Z}{k} = b^2 \Rightarrow \frac{12}{k} = 3 \Rightarrow k = \frac{12}{3} \Rightarrow \boxed{k = 4}$$

القطع الزائد

تعريف: هو مجموعة من النقط في المستوي التي تكون القيمة المطلقة لفرق بعدي اي منها عن نقطتين ثابتين ((البؤرتان)) يساوي عدداً ثابتاً .



قطع زائد بؤرتاه على محور السينات

البؤرتان $F_1\ (c,0)$ ، $F_2\ (-c,0)$

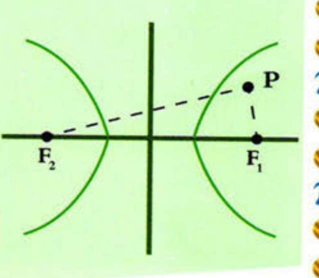
الرأسان $V_1\ (a,0)$ ، $V_2\ (-a,0)$

القطبان $M_1\ (0,b)$ ، $M_2\ (-b,0)$

* النقطتان $(0,b)-(0,-b)$ سوف نسميها القطبان فقط للتوضيح لم يطلق عليها اسم اقطاب في المنهج .

المعادلة القياسية :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

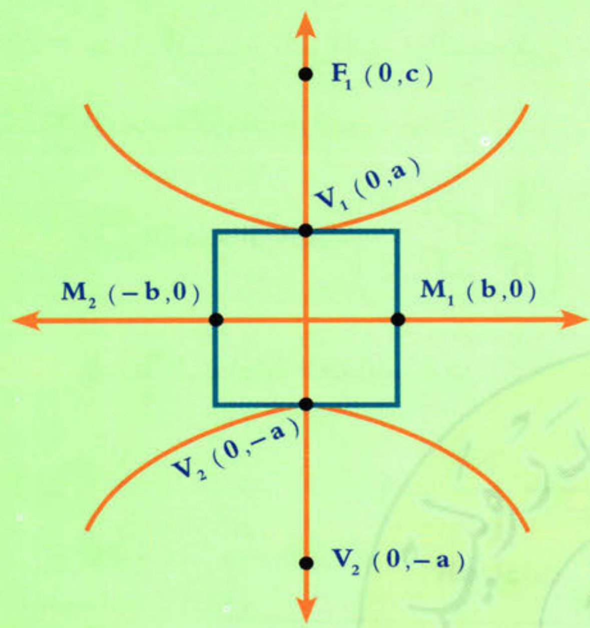


PF_1 يُسمى نصف القطر البؤري الايمن

PF_2 يُسمى نصف القطر البؤري الايسر

$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

$|PF_1 - PF_2|$ / القيمة المطلقة للفرق بين بعدي أي نقطة عن بؤرتيه .



قطع زائد بؤرتاه على محور الصادات

البؤرتان $F_1\ (0,c)$ ، $F_2\ (0,-c)$

الرأسان $V_1\ (0,a)$ ، $V_2\ (0,-a)$

القطبان $M_1\ (0,b)$ ، $M_2\ (0,-b)$

المعادلة القياسية :

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

ملاحظات

أولاً: مصطلحات القطع الزائد :

2a= طول المحور الحقيقي أو العدد الثابت أو البعد بين الرأسين .

2b= طول المحور المرافق ((التخيلي)) وهو عمودي المحور الحقيقي .

2c= البعد بين البؤرتين .

ثانياً: في القطع الزائد $\begin{pmatrix} c \text{ أكبر } a \\ c \text{ أكبر } b \end{pmatrix}$ دائماً وقد تكون $a = b$ أو a أكبر b أو a أصغر b

---

ثالثاً: لاحظ المعادلة القياسية :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

السينات الصادات

دائماً أول رقم يمثل a^2 والثاني (b^2) لا يتغير .

رابعاً: لا يوجد قانون للمساحة والمحيط في القطع الزائد .

خامساً: الاختلاف المركزي (e) أكبر من (1) لذلك ان وجدت اختلاف مركزي أكبر من (1) هذا قطع زائد حتى وإن لم يذكر نوع القطع .

سادساً: في القطع الزائد :

1. كل كلمة يمر $(x,0)$ أو $(0,y)$ يعني هذا (a)
2. كل يمس هذه a
3. كل يقطع عند رقم $x=\pm$ ، رقم $y=\pm$ هذا الرقم هو (a)

سابعاً: القوانين :

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$a=\sqrt{c^2-b^2}$$

$$b=\sqrt{c^2-a^2}$$

الاختلاف المركزي $e=\frac{c}{a}$



العلاقات بين القطوع

تعلم كيف تحدد العلاقة بين القطوع من خلال الأمثلة التوضيحية الآتية :

1 لو قال في السؤال مثلاً :

جد معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه // هي بؤرته القطع المكافئ

(القطع الناقص ← ناقص ، بؤرتيه ← c ، بؤرته القطع المكافئ ← P)

هي ← معناها علامة يساوي =

$P = C$ (P مكافئ ، C ناقص)

2 لو قال في السؤال مثلاً :

جد معادلة القطع الزائد الذي رأساه // هما بؤرتا القطع الناقص

(القطع الزائد ← زائد ، رأساه ← a ، بؤرتا ← c ، القطع الناقص ← ناقص)

$C = a$ (C ناقص ، a زائد)

3 لو قال في السؤال مثلاً :

جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنطبقان // على بؤرتي القطع الزائد

(القطع الناقص ← ناقص ، بؤرتاه ← c ، بؤرتي ← c ، القطع الزائد ← زائد)

تنطبقان ← معناها علامة يساوي =

$C = C$ (C زائد ، C ناقص)

4 لو قال في السؤال مثلاً :

جد معادلة القطع الناقص الذي أحد قطباه // هو رأس القطع الزائد

(القطع الناقص ← ناقص ، قطباه ← b ، رأس ← a ، القطع الزائد ← زائد)

هو ← معناها علامة يساوي =

$a = b$ (a زائد ، b ناقص)

5 عبارة قطعان زائد وناقص كل منهما يمر ببؤرة الاخر معناها :

$c = a$ (c زائد ، a ناقص)

$c = a$ (c ناقص ، a زائد)

راجع السؤال الخامس والثامن عشر في الاسئلة الوزارية

> *** عندما يذكر عبارة قطع زائد قائم معناها**
>
> **طول المحور الحقيقي = طول المحور المرافق**
>
> $2a = 2b \Rightarrow a = b$ وأن $e = \sqrt{2}$

مقارنة بين القطع الناقص والزائد

القطع الناقص	القطع الزائد
أولاً: له مساحة ومحيط فكل سؤال يحوي مساحة ومحيط هذه القطع ناقص	أولاً: لا يوجد له مساحة ومحيط لذلك السؤال الذي فيه مساحة أو محيط ولم يذكر نوع القطع فهو ناقص.
ثانياً: الاختلاف المركزي أصغر من (1)	ثانياً: الاختلاف المركزي أكبر من (1)
ثالثاً: a أكبر من b,c	ثالثاً: c أكبر من b,a
رابعاً: المعادلة القياسية ذات اشارة موجبة $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$	رابعاً: المعادلة القياسية ذات اشارة سالبة $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$
خامساً: المصطلحات: طول المحور الكبير = 2a طول المحور الصغير = 2b	خامساً: المصطلحات: طول المحور الحقيقي = 2a طول المحور المرافق = 2b
سادساً: يقطع المحورين عند a,b	سادساً: يقطع محور واحد عند a

أمثلة توضيحية:

قطع مخروطي مساحته $20\pi\ cm^2$ ..... الخ ⟵ القطع ناقص / فيه مساحة.

قطع مخروطي اختلافه المركزي 1.2 .... الخ ⟵ القطع زائد / e أكبر من (1).

قطع مخروطي رأسه (5,0) وإحدى بؤرتيه (3,0) .... الخ / القطع ناقص / $a > c$ (أكبر)

قطع مخروطي رأسه (10,0) ويمر من (0,6) ..... الخ / قطع ناقص يقطع المحورين a,b

قطع مخروطي طول محوره الحقيقي 12 وحدة .... الخ / قطع زائد / من مصطلح محور حقيقي.

مثال عيّن البؤرتان والرأسان وطول المحورين والاختلاف المركزي للقطوع الزائدة التالية ثم ارسمها:

1 $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$

$a^2=64 \Rightarrow \boxed{a=8}$

$b^2=36 \Rightarrow \boxed{b=6}$

$c^2=a^2+b^2$

$c^2=64+36 \Rightarrow c^2=100 \Rightarrow c=10$

1 البؤرتان:

$F_1(c,0) \Rightarrow F_1(10,0)$

$F_2(-c,0) \Rightarrow F_2(-10,0)$

2 الرأسان:

$V_1(a,0) \Rightarrow V_1(8,0)$

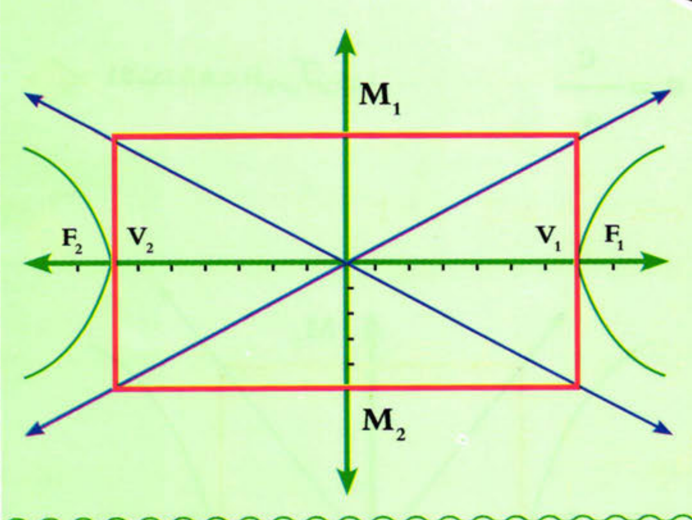
$V_2(-a,0) \Rightarrow V_2(-8,0)$

3 طول المحور الحقيقي $=2a=16$ وحدة

4 طول المحور المرافق $=2b=12$ وحدة

5 الاختلاف المركزي:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$$



2 $12x^2-4y^2=48$

$\left[12x^2-4y^2=48\right]\div 48$

$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$

$a^2=4 \Rightarrow \boxed{a=2}$

$b^2=12 \Rightarrow \boxed{b=2\sqrt{3}}$

$c^2=a^2+b^2$

$c^2=4+12 \Rightarrow c^2=16 \Rightarrow \boxed{c=4}$

1 البؤرتان:

$F_1(c,0) \Rightarrow F_1(4,0)$

$F_2(-c,0) \Rightarrow F_2(-4,0)$

2 الرأسان:

$V_1(a,0) \Rightarrow V_1(2,0)$

$V_2(-a,0) \Rightarrow V_2(-2,0)$

3 طول المحور الحقيقي $=2a=4$ وحدة

4 طول المحور المرافق $=2b=4\sqrt{3}$ وحدة

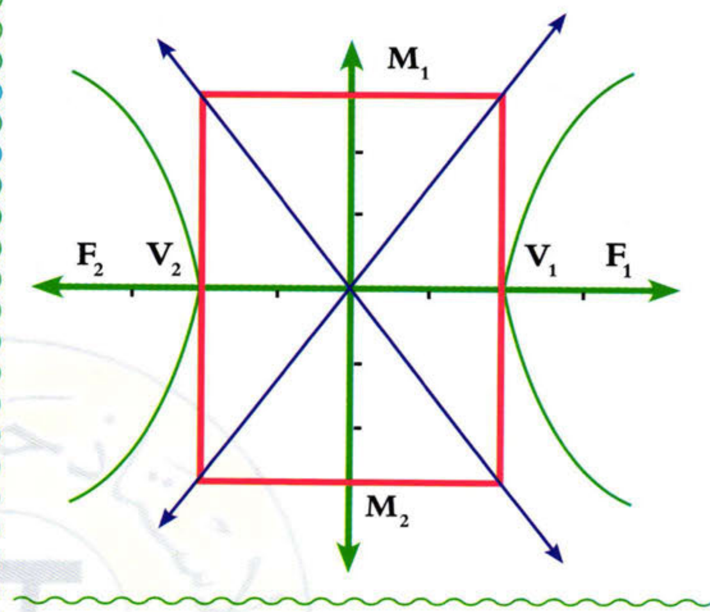




5 الاختلاف المركزي :

$$e=\frac{c}{a}$$

$$e=\frac{4}{2}=2 > 1$$



3 $\left[16x^2-9y^2=144\right]\div 144$

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$$

$a^2=9 \Rightarrow \boxed{a=3}$

$b^2=16 \Rightarrow \boxed{b=4}$

$c^2=a^2+b$

$c^2=9+16 \Rightarrow c^2=25 \Rightarrow \boxed{c=5}$

1 البؤرتان :

$F_1\ (c,0) \Rightarrow F_1\ (5,0)$

$F_2\ (-c,0) \Rightarrow F_2\ (-5,0)$

2 الرأسان :

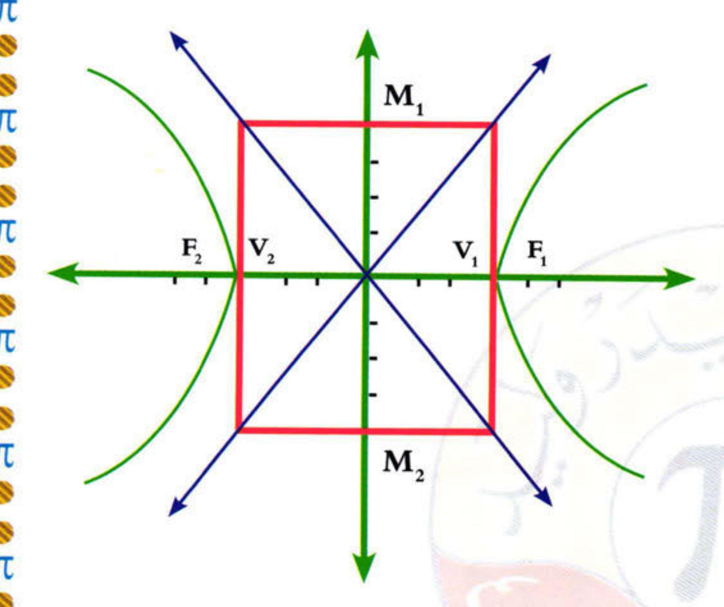
$V_1\ (a,0) \Rightarrow V_1\ (3,0)$

$V_2\ (-a,0) \Rightarrow V_2\ (-3,0)$

طول المحور الحقيقي ← وحدة $2a=2\times 3=6$

طول المحور المرافق ← وحدة $2b=2\times 4=8$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}$$



طريقة رسم القطع الزائد:

1. نعين الرأسان $V_1\ ,V_2$
2. نعين النقطتين $M_1\ ,\ M_2$
3. هذه النقاط الاربعة تكون مستطيل اضلاعه توزاي المحورين .
4. نرسم قطري المستطيل فهما يمثلان المحاذيان .
5. نعين البؤرتين $F_1\ ,\ F_2$ ثم نرسم ذراعي القطع .



أولاً: الاسئلة التي يعطي فيها (البؤرة – الرأس) طول المحورين الحقيقي أو المرافق وهذه لا تحتاج الى معادلات آنية:

مثال 1 جد معادلة القطع الزائد الذي طول محوره الحقيقي (12) وحدة طول وطول محوره المرافق (10) وحدة طول.

طول محوره الحقيقي $= 2a \Rightarrow [2a = 12] \div 2$

$a = 6$

طول محوره المرافق $= 2b \Rightarrow [2b = 10] \div 2$

$b = 5$

لم يحدد موقع البؤرة

السينات:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25} = 1$$

الصادات:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{25} = 1$$

مثال 2 جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وطول محوره المرافق (4) وحدات وبؤرتاه $(0, \sqrt{8})$, $(0, -\sqrt{8})$.

طول محوره المرافق $= 2b \Rightarrow [2b = 4] \div 2$

$b = 2$

$c = \sqrt{8}$ ((صادات))

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2}$

$a = \sqrt{8 - 4} = \sqrt{4}$

$a = 2$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 1$$

مثال 3 جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $(\mp 5, 0)$ ويتقاطع مع محور السينات عند $x = \mp 3$ ومركزه نقطة الأصل.

$c = 5$ ((سينات))

كل يتقاطع في القطع الزائد هو (a)

$a = 3$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$

$b = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16}$

$b = 4$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

مثال 4 جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وطول محوره الحقيقي (6) وحدات والاختلاف المركزي (2) والبؤرتان على محور السينات.

طول محوره الحقيقي $= 2a \Rightarrow [2a = 6] \div 2$

$a = 3$

تعويض

$e = \frac{c}{a}$

$2 = \frac{c}{3} \Rightarrow c = 6$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$

$b = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27}$

$b^2 = 27$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$$

ثانياً: اسئلة الدرجة الثانية والتي تحتاج الى معادلتين آنياً :

مثال 5 جد معادلة القطع الزائد الذي طول محوره المرافق $(2\sqrt{2})$ وحدة واختلافه المركزي يساوي (3) ومركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور الصادات .

طول محوره المرافق $= 2b \Rightarrow [2b = 2\sqrt{2}] \div 2$

$b = \sqrt{2}$

$e = \frac{c}{a}$

$3 = \frac{c}{a} \Rightarrow c = 3a \; ....(1)$

القانون العام $c^2 = a^2 + b^2$

$(3a)^2 = a^2 + (\sqrt{2})^2$

$9a^2 - a^2 = 2 \Rightarrow [8a^2 = 2] \div 8$

$a^2 = \frac{1}{4}$

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{y^2}{\frac{1}{4}} - \frac{x^2}{2} = 1}$

مثال 6 قطع زائد طول محوره الحقيقي (6) وحدات وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $(1, 2\sqrt{5})$ $(1, -2\sqrt{5})$ جد معادلتي القطعين المكافئ والزائد .

ربع أول $(1, 2\sqrt{5})$ ربع رابع $(1, -2\sqrt{5})$

القطع المكافئ : الفتحة يمين

$y^2 = 4Px$

$(2\sqrt{5})^2 = 4P(1)$

$[20 = 4P] \div 4 \Rightarrow P = 5$

$y^2 = 4(5)x \Rightarrow y^2 = 20x$

القطع الزائد :

طول محوره الحقيقي $= 2a \Rightarrow [2a = 6] \div 2$

$a = 3$

إحدى بؤرتيه	هي	بؤرة القطع المكافئ
c زائد	$=$	P مكافئ

$c = 5$

$\therefore c = 5$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$

$b = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16}$

$b = 4$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1}$



مثال 7

جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ ويمس دليل القطع المكافئ $x^2+12y=0$

القطع الناقص:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$$

$$a^2=25 \Rightarrow a=5$$

$$b^2=9 \Rightarrow b=3$$

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}$$

$$c=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}$$

$$c=4$$

القطع المكافئ:

$$x^2+12y=0$$

$$x^2=-12y$$

$$x^2=-4Py \Rightarrow [4P=12]\div 4$$

$$P=3$$

القطع الزائد:

بؤرتاه — هما — بؤرتي القطع الناقص

$$c_{\text{زائد}} = c_{\text{ناقص}}$$

$$c=4$$

كل يمس هو (a)

$$a=P \Rightarrow a=3$$

$$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow b=\sqrt{c^2-a^2}$$

$$b=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$$

$$b^2=7$$

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{7}=1$$

مثال 8

جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتا القطع الزائد $x^2-3y^2=12$ والنسبة بين طولي محوريه $=\frac{5}{3}$ ومركزه نقطة الاصل

القطع الزائد:

$$[x^2-3y^2=12]\div 12$$

$$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1 \Rightarrow$$

$$c^2=a^2+b^2$$

$$c^2=12+4 \Rightarrow c^2=16 \Rightarrow c=4$$

القطع الناقص:

بؤرتاه هما بؤرتي القطع الزائد

$$c_{\text{ناقص}} = c_{\text{زائد}}$$

$$c=4$$

النسبة بين طولي محوريه $= \frac{\text{كبير}}{\text{صغير}} = \frac{5}{3}$

$$\frac{5}{3}=\frac{2a}{2b}$$

$$[3a=5b]\div 5 \Rightarrow b=\frac{3}{5}a \quad ......(1)$$

$$a^2=b^2+c^2$$

$$a^2=\left(\frac{3}{5}a\right)^2+(4)^2$$

$$\left[a^2=\frac{9}{25}a^2+16\right].25$$

$$25a^2-9a^2=400 \Rightarrow 25a^2-9a^2=400$$

$$[16a^2=400]\div 16 \Rightarrow a^2=25 \Rightarrow a=5$$

نعوض المعادلة (1)

$$b=\frac{3}{5}a$$

$$b=\frac{3}{5}(5) \Rightarrow b=3$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

ملاحظة ومثال إذا أعطى البعد بين البؤرتين وأحد الرأسين بالترتيب فأن :

$2a$ = **حاصل طرح البعدين** ، $2c$ = **مجموع البعدين**

مثال 9 أكتب معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل إذا علمت ان أحد الرأسين يبعد بالبعد $1,9$ وحدات بالترتيب عن البؤرتين وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين .

المجموع $9+1=2c \Rightarrow [2c=10] \div 2$

$c=5$

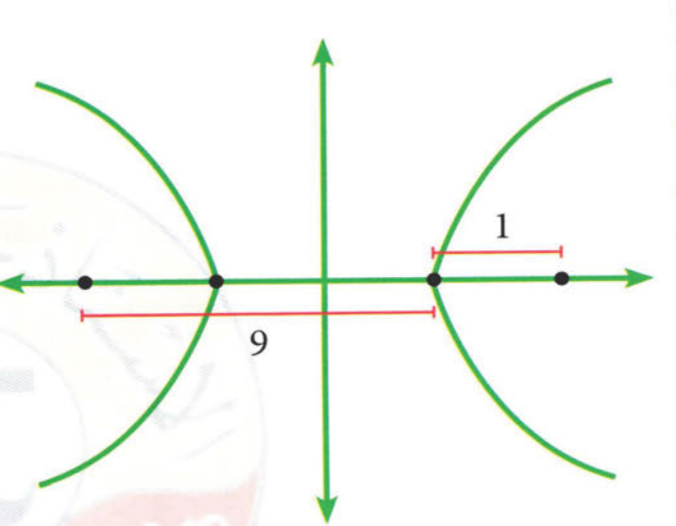
الطرح $9-1=2a \Rightarrow [2a=8] \div 2$

$a=4$

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow b=\sqrt{c^2-a^2}$

$b=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}$

$b=3$



رسم توضيحي تم اخذه على محور السينات

لم يحدد موقع البؤرة

1. سينات $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

2. صادات $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$

ملاحظة ومثال إذا أعطى احداثي نقطة (x,y) أحد الاحداثيات مجهول نعوض النقطة بالمعادلة ونجد المجهول .
أما إذا طلب طول نصف القطر البؤري الايمن PF_1 وهو البعد بين النقطة والبؤرة الموجبة F_1 والاخر نصف القطر البؤري الايسر PF_2 وهو البعد بين النقطة والبؤرة السالبة .

مثال 10 النقطة $P(6,L)$ تنتمي الى القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ومعادلته $x^2-3y^2=12$ جد:

أولاً: قيمة (L) .

النقطة $\underset{x,y}{P(6,L)}$ تحقق معادلة القطع الزائد .

$$x^2-3y^2=12$$

$$(6)^2-3L^2=12 \Rightarrow 36-3L^2=12$$

$$36-12=3L^2$$

$$\left[24=3L^2\right]\div 3$$

$$L^2=8 \quad \text{بالجذر}$$

$$L=\pm 2\sqrt{2}$$

ثانياً: نصف القطر البؤري الايمن PF_1 للقطع المرسوم من الجهة اليمنى للنقطة P

PF_1 ← النقطة $P(\quad)$ ، البؤرة $F_1(\quad)$

نجد F_1 اولاً ثم نجد المسافة بين F_1 والنقطة P

$$\left[x^2-3y^2=12\right]\div 12 \qquad a^2=12$$

$$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1 \qquad b^2=4$$

$$c^2=a^2+b^2$$

$$c^2=12+4$$

$$c^2=16 \Rightarrow c=4$$

$$\underset{(x_1,y_1)}{F_1(4,0)} \quad , \quad \underset{(x_2,y_2)}{P(6,2\sqrt{2})} \quad (\text{قيمة } L)$$

$$PF_1=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$PF_1=\sqrt{(6-4)^2+(2\sqrt{2}-0)^2}$$

$$PF_1=\sqrt{(2)^2+(2\sqrt{2})^2}$$

$$PF_1=\sqrt{4+8}=\sqrt{12}$$

$$PF_1=2\sqrt{3} \quad \text{وحدة}$$

مثال 11 قطع زائد مركزه نقطة الأصل ومعادلته $hx^2 - ky^2 = 90$ وطول محوره الحقيقي ($6\sqrt{2}$) وحدة وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتا القطع الناقص الذي معادلته $9x^2 + 16y^2 = 576$ جد قيمه $h, k \in R$.

$$\left[9x^2 + 16y^2 = 576\right] \div 576$$

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1 \quad , \quad a^2 = 64, \quad b^2 = 36$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{64 - 36} = \sqrt{28}$$

$$c = 2\sqrt{7}$$

القطع الزائد :

$$\text{طول محوره الحقيقي} = 2a \Rightarrow \left[2a = 6\sqrt{2}\right] \div 2$$

$$a = 3\sqrt{2} \quad \text{زائد}$$

بؤرتاه	تنطبقان	على بؤرة القطع الناقص
$c_{\text{زائد}}$	$=$	$c_{\text{ناقص}}$

$$c = 2\sqrt{7} \quad \text{زائد}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{28 - 18}$$

$$b = \sqrt{10} \Rightarrow b^2 = 10$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{10} = 1}$$

معادلة السؤال (التي تحوي مجاهيل)

$$\left[hx^2 - ky^2 = 90\right] \div 90$$

$$\frac{x^2}{\frac{90}{h}} - \frac{y^2}{\frac{90}{k}} = 1$$

$$\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{10} = 1$$

$$\frac{90}{h} = 18 \Rightarrow h = \frac{90}{18} \Rightarrow h = 5$$

$$\frac{90}{k} = 10 \Rightarrow k = \frac{90}{10} \Rightarrow k = 10$$

إيجاد معادلة القطع الزائد بإستخدام التعريف

أولاً : نجد البؤرة F_1 والبؤرة F_2

ثانياً: نستخدم قانون البعد بين نقطتين

$$PF = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

PF_1

(x_2, y_2) : $P(x, y)$

(x_1, y_1) : $F_1(c, 0)$

PF_2

(x_2, y_2) : $P(x, y)$

(x_1, y_1) : $F_2(-c, 0)$

$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

* هناك عدة خطوات لحل السؤال :

القانون ← التعويض ← التحويل ← التربيع ← الارجاع ← التربيع ثم تصفية الطرفين

التحويل ↓ تحويل أحد الجذرين إلى الطرف الأيمن

الارجاع ↓ ارجاع الجذر الى الطرف الأيسر



مثال 12 باستخدام التعريف جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $(2\sqrt{2},0)$, $(-2\sqrt{2},0)$ وينطبق محوره على المحورين الاحداثيين والقيمه المطلقة للفرق بين بعدي أي نقطة عن بؤرتيه = 4 وحدات .

$$(x_1, y_1) \qquad (x, y)$$

$$F_1(2\sqrt{2},0) \qquad F_1(2\sqrt{2},0)$$

$$F_2(-2\sqrt{2},0) \qquad F_2(-2\sqrt{2},0)$$

$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

القانون
$$\left|\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} - \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\right| = 2a$$

التعويض
$$\sqrt{(x-2\sqrt{2})^2+(y-0)^2} - \sqrt{(x+2\sqrt{2})^2+(y-0)^2} = \pm 4$$

هذا الجذر يبقى — ننقل الجذر للطرف الاخر

تربيع الطرفين
$$\sqrt{(x-2\sqrt{2})^2+y^2} = \pm 4 + \sqrt{(x+2\sqrt{2})^2+y^2}$$

$$(x-2\sqrt{2})^2 + y^2 = 16 \pm 8\sqrt{(x+2\sqrt{2})^2+y^2} + (x+2\sqrt{2})^2 + y^2$$

الجذر حذف مع التربيع — هذا الطرف مربع حدانية

فتح القوس
$$x^2 - 4\sqrt{2}x + 8 = 16 \pm 8\sqrt{x^2+4\sqrt{2}\,x+8+y^2} + x^2 + 4\sqrt{2}x + 8$$

ارجاع الجذر إلى الطرف الاصلي

التصفية
$$\mp 8\sqrt{x^2+4\sqrt{2}\,x+8+y^2} = 16 + 4\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}x$$

$$\left[\mp 8\sqrt{x^2+4\sqrt{2}\,x+8+y^2} = 16 + 8\sqrt{2}x\right] \div 8$$

تربيع الطرفين
$$\sqrt{x^2+4\sqrt{2}\,x+8+y^2} = (2+\sqrt{2}\,x)$$

$$x^2 + 4\sqrt{2}x + 8 + y^2 = 4 + 4\sqrt{2}x + 2x^2$$

$$2x^2 - x^2 - y^2 = 8 - 4 \Rightarrow \left[x^2 - y^2 = 4\right] \div 4$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$$

الاسئلة الوزارية الخاصة بالقطع الزائد والربط بين القطوع الثلاثة

سؤال 1 جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$ وأحد رأسيه بؤرة القطع المكافئ $y^2+8x=0$.

1997 - د (2)

القطع الناقص:

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$$

$a^2=36 \quad , \quad b^2=20$ ((سينات))

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}$$

$$c=\sqrt{36-20}=\sqrt{16}$$

$$c=4$$

القطع المكافئ:

$$y^2=-8x$$

$$y^2=-4Px \Rightarrow [4P=8]\div 4$$

القطع الزائد:

$$\underset{\text{زائد}}{C}=\underset{\text{ناقص}}{C} \Rightarrow c=4$$

$$\underset{\text{مكافئ}}{P}=\underset{\text{زائد}}{a} \Rightarrow a=2$$

$$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow b=\sqrt{c^2-a^2}$$

$$b=\sqrt{16-4}=\sqrt{12}$$

$$b^2=12$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1}$$

سؤال 2 جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص $3x^2+5y^2=120$ والنسبة بين طول محوره الحقيقي والبعد بين بؤرتيه كنسبة $\frac{1}{2}$.

2001 - د (1)

القطع الناقص:

$$\left[\frac{3x^2}{120}+\frac{5y^2}{120}=\frac{120}{120}\right]\div 120$$

$\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{24}=1 \quad , \quad a^2=40 \quad , \quad b^2=24$ ((سينات))

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}$$

$$c=\sqrt{40-24}=\sqrt{16}$$

$$c=4$$

القطع الزائد:

$$\underset{\text{زائد}}{C}=\underset{\text{ناقص}}{C} \Rightarrow c=4$$

$$\frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}c}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{c}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{a}{4}=\frac{1}{2} \Rightarrow [2a=4]\div 2$$

$$a=2$$

$$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow b=\sqrt{c^2-a^2}$$

$$b=\sqrt{16-4}=\sqrt{12}$$

$$b^2=12$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1}$$

سؤال 3 جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطعين المكافئين $y^2 = 20x$, $y^2 = -20x$ والفرق بين طولي محوريه الحقيقي والمرافق يساوي (2) وحدة.

القطع المكافئ:

$y^2 = 20x$

$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 20] \div 4 \Rightarrow P = 5, F(5,0)$

$y^2 = -20x$

$y^2 = -4Px \Rightarrow [4P = 20] \div 4 \Rightarrow P = 5, F(-5,0)$

القطع الزائد:

$C_{\text{زائد}} = P_{\text{مكافئ}} \Rightarrow c = 5$

الفرق بين طولي محوريه الحقيقي والمرافق

$[2a - 2b = 2] \div 2$

$a - b = 1 \Rightarrow a = 1 + b$ ....(1)

تعويض

$c^2 = a^2 + b^2$

مربع حدانية

$(5)^2 = (1+b)^2 + b^2 \Rightarrow 25 = 1 + 2b + b^2 + b^2$

$2b^2 + 2b + 1 - 25 = 0$

$[2b^2 + 2b - 24 = 0] \div 2$

$b^2 + b - 12 = 0$

$(b+4)(b-3) = 0$

أما $b + 4 = 0$ لا يمكن ان تكون سالبة لذلك يُهمل

أو $b - 3 = 0 \Rightarrow b = 3$ نعوض في معادلة (1)

$a = 1 + b = 1 + 3 \Rightarrow a = 4$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

ملاحظة حرف العطف (و) في اللغة العربية ((الفرق بين طولي محوريه الحقيقي والمرافق)) تحمل وجهين:

الأول ← $2a - 2b = 2$

الثاني ← $2b - 2a = 2$

تم حل السؤال على الاحتمال الأول وسنتطرق الى الوجه الثاني من الحل.

$[2b - 2a = 2] \div 2$

$b - a = 1 \Rightarrow b = 1 + a$ ....(1)

$c^2 = a^2 + b^2$

$(5)^2 = a^2 + (1+a)^2$

مربع حدانية

$25 = a^2 + 1 + 2a + a^2$

$2a^2 + 2a - 24 = 0 \div 2$

$a^2 + a - 12 = 0$

$(a+4)(a-3) = 0$

$a + 4 = 0$ لا يمكن ان تكون سالبة لذلك يُهمل

$a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3$

$b = 1 + a = 1 + 3 = 4$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

سؤال 4 جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما رأسا القطع الناقص $x^2 + 9y^2 = 36$ والنسبة بين طول محوره الحقيقي الى البعد بين بؤرتيه تساوي $\left(\frac{1}{2}\right)$ وينطبق محوره على المحورين الاحداثيين .

2002 - د (2)

القطع الناقص :

$$\left[\frac{x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = \frac{36}{36}\right] \div 36$$

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad , \quad a^2 = 36 \Rightarrow a = 6$$

القطع الزائد :

بؤرتاه	هما	رأسا القطع الناقص
c زائد	=	a ناقص

$c = 6$

$$\frac{2a}{2c} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow [2a = 6] \div 2$$

$$a = 3$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27}$$

$$b^2 = 27$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1}$$

سؤال 5 جد معادلة القطع الزائد الذي يمر ببؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$ والنسبة بين البعد بين بؤرتيه وطول محوره المرافق كنسبة $\frac{5}{4}$.

القطع الناقص :

$$\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$$

$a^2 = 49 \quad , \quad b^2 = 24$ ((سينات))

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{49 - 24} = \sqrt{25}$$

$$c = 5$$

القطع الزائد :

$c_{\text{ناقص}} = a_{\text{زائد}}$

قال يمر وكل يمر a في القطع الزائد

$$a = 5$$

$$\frac{2c}{2b} = \frac{5}{4} \quad [4c = 5b] \div 4 \Rightarrow c = \frac{5}{4} b \quad .....(1)$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\left(\frac{5}{4} b\right)^2 = (5)^2 + b^2$$

$$\left[\frac{25}{16} b^2 = 25 + b^2\right] . 16 \Rightarrow 25b^2 = 400 + 16b^2$$

$$25b^2 - 16b^2 = 400 \Rightarrow 9b^2 = 400$$

$$b^2 = \frac{400}{9}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{\frac{400}{9}} = 1}$$

سؤال 6 قطعان زائد وناقص كل منهما يمر ببؤرة الاخر جد معادلة القطع الزائد اذا علمت ان معادلة القطع الناقص هي $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ علماً ان محوريهما على المحورين الاحداثيين.

القطع الناقص:

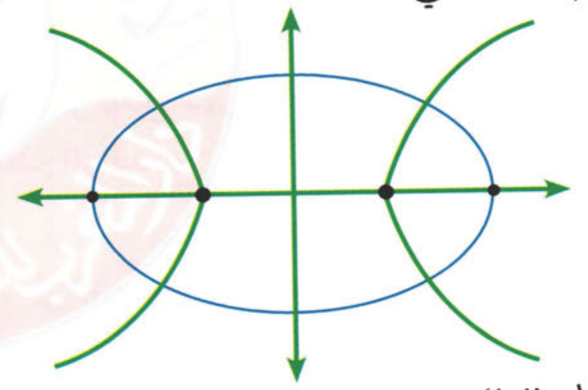
$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

$a^2=25 \rightarrow a=5 \quad , \quad b^2=9 \rightarrow b=3$

$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-9}$

$c=\sqrt{16} \Rightarrow c=4$

رسم توضيحي



القطع الزائد:

للزائد $\underset{\text{زائد}}{a}=\underset{\text{ناقص}}{c} \Rightarrow a=4$

للزائد $\underset{\text{زائد}}{c}=\underset{\text{ناقص}}{a} \Rightarrow c=5$

$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}$

للزائد $b=3$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1}$$

سؤال 7 جد معادلة القطع المخروطي الذي محوراه هما المحورين الاحداثيين وإحدى بؤرتيه $(-5,0)$ واحد رأسيه $(3,0)$.

2004 - د (2) | 2005 - تمهيدي | 2006 - د (2) | 2008 - د (2) | 2014 - د (3)

البؤرة $(-5,0) \rightarrow c=5$

الرأس $(3,0) \rightarrow a=3$

$a<c$ «أصغر» أي ان القطع زائد

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow b=\sqrt{c^2-a^2}$

$b=\sqrt{25-9}=\sqrt{16} \Rightarrow b=4$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1}$$

سؤال 8 جد معادلة القطع الزائد الذي إحدى بؤرتيه نقطة تقاطع المستقيم $2x-y=8$ مع محور السينات وطول محوره محوره التخيلي (4) وحدات.

2007 تمهيدي

(نقطة التقاطع مع محور السينات) $y=0$

$2x-0=8 \Rightarrow [2x=8]\div 2 \Rightarrow x=4$

$(4,0) \rightarrow \quad , \quad c=4$

طول محوره التخيلي $=2b \Rightarrow [2b=4]\div 2$

$\boxed{b=2}$

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow a=\sqrt{c^2-b^2}$

$a=\sqrt{16-4}=\sqrt{12}$

$a^2=12$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1}$$

سؤال 9 جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطعين المكافئين $y^2 = 20x$, $y^2 = -20x$ وطول محوره المرافق (8) وحدات .

2005 - د (1) | 2008 - د (1) | 2015 - د (4) رصافة

القطع المكافئ :

$y^2 = 20x$

$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 20] \div 4 \Rightarrow P = 5$

$F(5,0)$

$y^2 = -20x$

$y^2 = -4Px \Rightarrow 4P = 20 \div 4 \Rightarrow P = 5$

$F(-5,0)$

القطع الزائد : $P = c \Rightarrow c = 5$

طول محوره التخيلي $= 2b \Rightarrow [2b = 8] \div 2$

$b = 4$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2}$

$a = \sqrt{25-16} = \sqrt{9}$

$a = 3$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

سؤال 10 جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الزائد $8y^2 - x^2 = 32$ ويمس دليل القطع المكافئ $y^2 + 16x = 0$.

2006 - د (1) | 2016 - د (2)

القطع الزائد :

$$[8y^2 - x^2 = 32] \div 32 \Rightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{32} = 1$$

$a^2 = 4$, $b^2 = 32$, $c = ?$

$c^2 = a^2 + b^2$

بالجذر

$c^2 = 4 + 32 \Rightarrow c^2 = 36 \Rightarrow c = 6$

القطع المكافئ :

$y^2 = -16x$

$y^2 = -4Px \Rightarrow [4P = 16] \div 4$

$P = 4$

القطع الناقص بؤرتاه هما بؤرتي القطع الزائد

$c_{\text{زائد}} = c_{\text{ناقص}} \Rightarrow c = 6$

$P_{\text{مكافئ}} = b_{\text{ناقص}} \Rightarrow b = 4$

* كل يمس في القطع الناقص اما a أو b هنا اصبحت b لسببين :

1. لأن a يجب ان تكون أكبر من c إذا اصبحت a=4 تكون أصغر من c وهي (6) .
2. لأن البؤرة صادات والمكافئ سينات والذي يخالف البؤرة هو قطب b

$a^2 = b^2 + c^2$

$a^2 = 4^2 + 6^2$

$a^2 = 16 + 36 \Rightarrow a^2 = 52$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{52} = 1$$



سؤال 11 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل والبعد بين بؤرتيه (8) وحدات ورأساه بؤرتا القطع الزائد $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

2007 - د (1)

القطع الزائد :

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

$a^2=16 \quad , \quad b^2=9$ سينات

$$c^2=a^2+b^2$$

$$c^2=16+9 \Rightarrow c^2=25 \Rightarrow c=5$$

القطع الناقص:

$\underset{\text{ناقص}}{a} = \underset{\text{زائد}}{c} \Rightarrow a=5$

البعد بين بؤرتيه $=2c \Rightarrow \left[2c=8\right]\div 2$

$$c=4$$

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow b=\sqrt{a^2-c^2}$$

$$b=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}$$

$$b=3$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1}$$

سؤال 12 جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما رأسا القطع الناقص $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$ وطول محوره الحقيقي (12) وحدة وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين .

2007
خارج القطر

القطع الناقص:

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1 \qquad a^2=100 \Rightarrow a=10$$

$$V_1(10,0), V_2(-10,0)$$

القطع الزائد :

القطع الزائد بؤرتاه	هما	رأسا القطع الناقص
c	$=$	a

للزائد $\boxed{c=10}$

طول محوره الحقيقي $=2a \Rightarrow \left[2a=12\right]\div 2$

للزائد $\boxed{a=6}$

$$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow b=\sqrt{c^2-a^2}$$

$$b=\sqrt{100-36}$$

$$b=\sqrt{64} \Rightarrow b=8$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1}$$

سؤال 13 جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ والنسبة بين طول محوره الحقيقي الى البعد بين بؤرتيه تساوي $\left(\frac{1}{2}\right)$

2008 تمهيدي

القطع الناقص:

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, $a^2=25$, $b^2=9$, $c=?$

$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}$

$c=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}$

للقطع الناقص $c=4$

القطع الزائد:

بؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص

$c_{\text{زائد}} = c_{\text{ناقص}}$

$c=4$

$\frac{\text{طول محوره الحقيقي}}{\text{البعد بين بؤرتيه}}=\frac{2a}{2c} \Rightarrow \frac{2a}{2c}=\frac{1}{2}$

$\frac{a}{4}=\frac{1}{2} \Rightarrow [2a=4]\div 2$

للزائد $a=2$

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow b=\sqrt{c^2-a^2}$

$b=\sqrt{16-4}=\sqrt{12}$

$b^2=12$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$

سؤال 14 جد معادلة القطع الناقص الذي يمر ببؤرتي القطع الزائد $9y^2-16x^2=144$ ويقطع من محور السينات جزءاً طوله 12 وحدة .

2009 - د (1)

القطع الزائد :

$[9y^2-16x^2=144]\div 144$

$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$ $a^2=16$, $b^2=9$ صادات

$c^2=a^2+b^2$

$c^2=16+9$

$c^2=25 \rightarrow c=5 \rightarrow F_1(0,5), F_2(0,-5)$

القطع الناقص:

القطع الناقص يمر من بؤرة الزائد

$(0,5)$

$a=5$ أو $b=5$

الجزء المقطوع يمر من محور السينات

أما $[2a=12]\div 2$ $a=6$

أو $[2b=12]\div 2$ $b=6$

الاكبر $a \leftarrow a=6$ سينات

الأصغر $b \leftarrow b=5$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$

سؤال 15

جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $25x^2 + 9y^2 = 225$ ويمس دليل القطع المكافئ الذي معادلته $x^2 + 8y = 0$.

2015 - د (3)

القطع الناقص:

$$\left[25x^2 + 9y^2 = 225\right] \div 225$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1 \quad , \quad a^2 = 25 , b^2 = 9$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16}$$

$$c = 4$$

القطع المكافئ:

$$x^2 = -8y$$

$$x^2 = -4Py \Rightarrow \left[4P = 8\right] \div 4$$

$$P = 2$$

القطع الزائد:

$$\underset{\text{زائد}}{c} = \underset{\text{ناقص}}{c} \Rightarrow c = 4$$

$$\underset{\text{مكافئ}}{P} = \underset{\text{زائد}}{a} \Rightarrow a = 2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$$

$$b^2 = 12$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{12} = 1}$$

سؤال 16

جد معادلة القطع المخروطي الذي رأسه نقطة الأصل وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين واختلافه المركزي يساوي (3) ويمر بالنقطة (0 , 2) .

2016 تمهيدي

* القطع زائد لأن $e > 1$

الاختلاف المركزي أكبر من (1)

$(0,2) \rightarrow a = 2$ (رأس صادات)

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{3}{1} = \frac{c}{2}$$

$$c = 6$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{36 - 4}$$

$$b = \sqrt{32} \Rightarrow b^2 = 32$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{32} = 1}$$

قال الشاعر:

دعْ حبَّ أو من كلفتَ بحبهِ
ما الحبُّ إلا للحبيبِ الأخرِ
ما قد تولى لا ارتجاع لطيبه
هل غائبُ اللذاتِ مثل الحاضرِ

سؤال 17 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه تقعان على محور السينات ومجموع طولي محوريه يساوي (18) وحدة وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الزائد $x^2 - 2y^2 = 6$.

القطع الزائد: $\left[x^2 - 2y^2 = 6\right] \div 6$

2014 نازحين

$$\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1 \quad , \quad a^2 = 6 , b^2 = 3$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 6 + 3$$

$$c^2 = 9 \rightarrow c = 3$$

القطع الناقص:

$$c_{\text{ناقص}} = c_{\text{زائد}}$$

$$c = 3$$

مجموع طولي محوريه $\left[2a + 2b = 18\right] \div 2$

$$a + b = 9 \Rightarrow a = 9 - b \quad ....(1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$(9 - b)^2 = b^2 + (3)^2$$

$$81 - 18b + \cancel{b^2} = \cancel{b^2} + 9 \Rightarrow 18b = 81 - 9$$

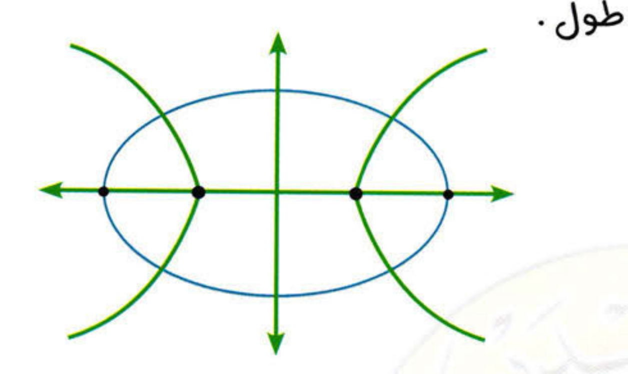
$$\left[18b = 72\right] \div 18 \Rightarrow b = 4$$

$$a = 9 - b$$

$$a = 9 - 4 \Rightarrow a = 5$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

سؤال 18 جد معادلة القطع الزائد والناقص اذا كان كل منهما يمر ببؤرتي الاخر وكلاهما تقعان على محور السينات وطول المحور الكبير يساوي $6\sqrt{2}$ وحدة طول وطول المحور الحقيقي يساوي (6) وحدة طول .



القطع الزائد: $\left[2a = 6\right] \div 2$

$$a = 3 \quad \text{زائد}$$

القطع الناقص: $\left[2a = 6\sqrt{2}\right] \div 2$

$$a = 3\sqrt{2} \quad \text{ناقص}$$

$$a_{\text{زائد}} = c_{\text{ناقص}} \rightarrow c = 3 \quad \text{ناقص}$$

$$a_{\text{ناقص}} = c_{\text{زائد}} \rightarrow c = 3\sqrt{2} \quad \text{زائد}$$

الزائد	الناقص
$b = \sqrt{c^2 - a^2}$	$b = \sqrt{a^2 - c^2}$
$b = \sqrt{18 - 9} = \sqrt{9}$	$b = \sqrt{18 - 9} = \sqrt{9}$
$b = 3$	$b = 3$
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$	$\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{9} = 1$

سؤال 19 عيّن النقاط على القطع الزائد الذي معادلته $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{1}=1$ والتي تبعد من البؤرة في الفرع الايمن بمقدار $\frac{1}{\sqrt{3}}$ وحدة.

2005 - د (2)

$$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{1}=1 \Rightarrow a^2=3 \ , \ b^2=1 \ , \ c=?$$

$$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow c^2=3+1$$

$$c^2=4$$

$$c=2$$

$$F_1\overset{x_1,y_1}{(2,0)} \qquad P\overset{x_2,y_2}{(x,y)}$$

$$PF_1=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2}$$ بالتربيع

$$\frac{1}{3}=(x-2)^2+y^2$$

مربع حدانية

$$\left[\frac{1}{3}=x^2-4x+4+y^2\right].3$$

$$1=3x^2-12x+12+3y^2$$

$$3x^2+3y^2-12x+11=0 \quad ....(1)$$

نتخلص من y^2 ونجدها من معادلة القطع

$$\frac{x^2}{3}-y^2=1 \Rightarrow y^2=\frac{x^2}{3}-1 \quad ....(2)$$

$$3x^2+3\left(\frac{x^2}{3}-1\right)-12x+11=0$$

$$3x^2+x^2-3-12x+11=0$$

$$\left[4x^2-12x+8=0\right]\div 4$$

$$x^2-3x+2=0$$

$$(x-1)(x-2)=0$$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

عندما $x=1$

$$y^2=\frac{x^2}{3}-1$$

$$y^2=\frac{1}{3}-1=\frac{-2}{3} \quad \notin R$$ يُهمل

عندما x=2

$$y^2=\frac{2^2}{3}-1 \Rightarrow y^2=\frac{1}{3}$$ بالجذر

توحيد مقامات

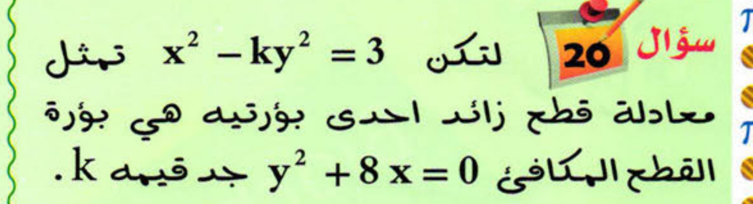
$$y=\mp\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$P_1\left(2,\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \qquad P_2\left(2,\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$$

إستراحة شعرية:

وهواك في قلب الظنون حقيقة
لا ريب فيه وحبُ غيرك باطلُ

إن كان حبك في الفؤاد فريضةٌ
فسواك في شرعِ الغرام نوافلُ



سؤال 20 لتكن $x^2 - ky^2 = 3$ تمثل معادلة قطع زائد احدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2 + 8x = 0$ جد قيمه k.

(2007 - د (1))

القطع المكافئ:

$$y^2 = -8x$$

$$y^2 = -4Px \Rightarrow [4P = 8] \div 4$$

$$P = 2$$

القطع الزائد:

$$\underset{\text{زائد}}{c} = \underset{\text{مكافئ}}{P}$$

$$c = 2$$

$$[x^2 - ky^2 = 3] \div 3 \Rightarrow \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{\frac{3}{k}} = 1$$

$$a^2 = 3 \quad , \quad b^2 = \frac{3}{k} \quad , \quad c = 2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$(2)^2 = 3 + \frac{3}{k}$$

$$4 = 3 + \frac{3}{k} \Rightarrow 4 - 3 = \frac{3}{k} \Rightarrow 1 = \frac{3}{k}$$

$$\boxed{k = 3}$$

سؤال 21 لتكن $5y^2 - 4x^2 = h$ معادلة قطع زائد واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $4y - 5x^2 = 0$ جد قيمه h.

القطع المكافئ:

$$4y - 5x^2 = 0$$

(2003 - د (1))

$$[5x^2 = 4y] \div 5$$

$$x^2 = \frac{4}{5}y$$

$$x^2 = \frac{4}{5}y$$

$$x^2 = 4Py \Rightarrow \left[4P = \frac{4}{5}\right] \div 4$$

$$P = \frac{\cancel{4}}{\cancel{4} \times 5} \Rightarrow P = \frac{1}{5}$$

القطع الزائد:

$$\underset{\text{مكافئ}}{P} = \underset{\text{زائد}}{c} \Rightarrow c = \frac{1}{5}$$

$$[5y^2 - 4x^2 = h] \div h$$

$$\frac{y^2}{\frac{h}{5}} - \frac{x^2}{\frac{h}{4}} = 1$$

$$a^2 = \frac{h}{5} \quad , \quad b^2 = \frac{h}{4} \quad , \quad c = \frac{1}{5}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{h}{5} + \frac{h}{4}$$ توحيد مقامات

$$\frac{1}{25} = \frac{4h + 5h}{20} \Rightarrow \frac{1}{25} = \frac{9h}{20}$$

$$h = \frac{\overset{4}{\cancel{20}}}{9 \times \underset{5}{\cancel{25}}} \Rightarrow \boxed{h = \frac{4}{45}}$$



The Master

Haider Waleed

07701780364

Part One

